UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 17/7/18 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ e una base di $\mathbb{R}^2$ che la diagonalizza.

2. Posto $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \end{pmatrix}$ trovare trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$ ortogonali a v rispetto a $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ e unitarî rispetto a $\| \cdot \|_A$.

3. Trovare i punti all'infinito del sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ di equazione
$2x^3 + x^2y - 25xy^2 + 12y^3 - 4xy + y^2 - 5x + 7 = 0$.

4. Dire per quali $t \in \mathbb{R}$ la conica $(2t+1)x^2 + 12xy + ty^2 - 2x - \frac{4}{3}y + 3 = 0$ è una parabola.

5. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ determinare il tipo affine della quadrica $(k+1)x^2 + 2yz = k$.

6. Calcolare la matrice hessiana nell'origine della funzione $f(x,y) = x\sin(x+y) - 3y\cos(x-y) + 3y^2$ e i segni dei suoi autovalori.

7. Calcolare $\int_{\partial Q} \Big((y - \cos(x))\,\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}y \Big)$ dove $Q = [0,1] \times [0,1]$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 17/7/18 — Esercizî

1. Al variare di $z \in \mathbb{C}$ considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} 5z+4-i & 2-2i \\ -2+2i & 5z+1-4i \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Provare che esiste sempre una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori di A.

(B) (4 punti) Per $z = 0$ esibire una base ortogonale $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ di $\mathbb{C}^2$ che diagonalizza A.

(C) (4 punti) Verificare che in realtà $\mathcal{B}$ diagonalizza M per ogni z, calcolando gli autovalori λ_1, λ_2 relativi a v_1, v_2.

2. Considerare la funzione $f(x,y) = \sin(2x) + \ln(1-3y)$ e la curva $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 3t - t^2 \\ t^2 + 2t \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che α è regolare su $\mathbb{R}$ e passa per 0.

(B) (3 punti) Provare che l'equazione $f(x,y) = 0$ vicino a 0 definisce una curva regolare avente la stessa retta tangente di α in 0.

(C) (4 punti) Calcolare la curvatura con segno di α nel punto 0.

(D) (3 punti) Calcolare $\int_\beta \left(x + y - \frac{5}{4}\right)$ dove β è la restrizione di α a $[0,1]$.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. ♢

1. $\lambda_1 = 8,\ \lambda_2 = -3;\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$

2. $\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. $[1:2],\ [3:1],\ [4:-1]$

4. $t = -\frac{9}{2}$

5. Iperboloide iperbolico per $k < -1$ e per $k > 0$; iperboloide ellittico per $-1 < k < 0$; degenere per $k = 0$ e per $k = -1$

6. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$; positivi

7. -1

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni degli esercizî

5. $\diamondsuit$

1.

(A) Bisogna vedere che A è normale. Posto $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ciò equivale a $|c| = |b|$ e $a\overline{c} + b\overline{d} = \overline{a}b + \overline{c}d$. Poiché $c = -b$ la prima relazione certamente vale. Sostituendo $c = -b$ nella seconda si trova che essa equivale a $\overline{b}(a-d) + b(\overline{a} - \overline{d})$, ovvero al fatto che $\overline{b}(a-d)$ sia immaginario puro. Ora sostituendo i valori si vede che $\overline{b}(a-d) = (2+2i)(3+3i) = 6(1+i)^2 = -12i$ e l'argomento è completo.

(B) $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}$

(C) $\lambda_1 = 5(z+1),\ \lambda_2 = 5(z-i)$

2.

(A) La seconda componente di $\alpha'(t)$ si annulla solo per $t = -1$, in cui la prima non si annulla: $\alpha(0) = 0$

(B) Il gradiente di f in 0 vale $(2, -3)$, che è non nullo, e $\alpha'(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ sta nel suo nucleo

(C) $\frac{10}{13\sqrt{13}}$

(D) $\frac{5}{24}\left(17\sqrt{17} - 13\sqrt{13}\right)$