



Nome _____ Cognome _____ Matricola _____

1. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ e una base di \mathbb{R}^2 che la diagonalizza.
2. Posto $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ trovare trovare tutti i vettori di \mathbb{R}^2 ortogonali a v rispetto a $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ e unitari rispetto a $\| \cdot \|_A$.
3. Trovare i punti all'infinito del sottoinsieme di \mathbb{R}^2 di equazione $3x^3 - 10x^2y - 27xy^2 + 10y^3 - 4xy + y^2 - 5x + 7 = 0$.
4. Dire per quali $t \in \mathbb{R}$ la conica $(t + 2)x^2 + 12xy + (2t + 5)y^2 + 4x + 6y - 1 = 0$ è una parabola.
5. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ determinare il tipo affine della quadrica $kx^2 + 2yz = k - 1$
6. Calcolare la matrice hessiana nell'origine della funzione $f(x, y) = x \sin(x + 5y) - y \cos(4x - y) + 2y^2$ e i segni dei suoi autovalori.
7. Calcolare $\int_{\partial Q} \left((\sin(x)) dx + (x - e^{y^2}) dy \right)$ dove $Q = [0, 1] \times [0, 1]$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



1. Considerare la funzione $f(x, y) = \sin(2x) + \ln(1 - 3y)$ e la curva $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 3t - t^2 \\ t^2 + 2t \end{pmatrix}$.
- (A) (2 punti) Provare che α è regolare su \mathbb{R} e passa per 0.
- (B) (3 punti) Provare che l'equazione $f(x, y) = 0$ vicino a 0 definisce una curva regolare avente la stessa retta tangente di α in 0.
- (C) (4 punti) Calcolare la curvatura con segno di α nel punto 0.
- (D) (3 punti) Calcolare $\int_{\beta} (x + y - \frac{5}{4})$ dove β è la restrizione di α a $[0, 1]$.
2. Al variare di $z \in \mathbb{C}$ considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} 5z + 4 - i & 2 - 2i \\ -2 + 2i & 5z + 1 - 4i \end{pmatrix}$.
- (A) (4 punti) Provare che esiste sempre una base ortonormale di \mathbb{C}^2 costituita da autovettori di A .
- (B) (4 punti) Per $z = 0$ esibire una base ortogonale $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ di \mathbb{C}^2 che diagonalizza A .
- (C) (4 punti) Verificare che in realtà \mathcal{B} diagonalizza M per ogni z , calcolando gli autovalori λ_1, λ_2 relativi a v_1, v_2 .

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



Risposte ai quesiti

5. ♥

1. $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = -4; v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. $[1 : 3], [2 : -1], [5 : 1]$

4. $t = -\frac{13}{2}$

5. Iperboloide iperbolico per $k < 0$ e per $k > 1$; iperboloide ellittico per $0 < k < 1$ degenerare per $k = 1$ e per $k = 0$

6. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$; discordi

7. 1

1. ♠ 2. ♥ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♥ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♥ 9. ♣ 10. ◇



Soluzioni degli esercizi

5. ♡

1.

- (A) La seconda componente di $\alpha'(t)$ si annulla solo per $t = -1$, in cui la prima non si annulla:
 $\alpha(0) = 0$
- (B) Il gradiente di f in 0 vale $(2, -3)$, che è non nullo, e $\alpha'(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ sta nel suo nucleo
- (C) $\frac{10}{13\sqrt{13}}$
- (D) $\frac{5}{24} (17\sqrt{17} - 13\sqrt{13})$

2.

- (A) Bisogna vedere che A è normale. Posto $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ciò equivale a $|c| = |b|$ e $a\bar{c} + b\bar{d} = \bar{a}b + \bar{c}d$.
Poiché $c = -b$ la prima relazione certamente vale. Sostituendo $c = -b$ nella seconda si trova che essa equivale a $\bar{b}(a - d) + b(\bar{a} - \bar{d})$, ovvero al fatto che $\bar{b}(a - d)$ sia immaginario puro. Ora sostituendo i valori si vede che $\bar{b}(a - d) = (2 + 2i)(3 + 3i) = 6(1 + i)^2 = -12i$ e l'argomento è completo.
- (B) $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}$
- (C) $\lambda_1 = 5(z + 1)$, $\lambda_2 = 5(z - i)$