UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 26/6/18 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Dire per quali t è diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} t^2+2t+2 & -t-1 \\ 2t^2+2t & -t \end{pmatrix}$.

2. Data $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ calcolare $p_A(t)$ sapendo che $\mathrm{tr}(A) = -4$, che $\det(A) = 5$ e che $p_A(-2) = 17$.

3. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{C}^2$ ortogonali a $\begin{pmatrix} 2-i \\ 1+3i \end{pmatrix}$, con somma delle coordinate reale e unitarî.

4. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ le matrici $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 7 \\ 4 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ sono coniugate tra loro.

5. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ determinare il tipo affine della conica $tx^2 + 2xy + 2y^2 - 2x + \frac{8}{3}y + 2 = 0$.

6. Se $P, Q \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ sono sottospazî proiettivi di dimensione 2, cosa può essere $P \cap Q$?

7. Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ è esatta la forma $xy^2 \sin(5x^2y^3)\,(y\,\mathrm{d}x + kx\,\mathrm{d}y)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 26/6/18 — Esercizî

1. In uno spazio vettoriale W reale di dimensione finita e dotato di un prodotto scalare, considerare due sottospazî vettoriali U_1, U_2 e le proiezioni ortogonali p_1, p_2 su di essi. Porre $p = p_1 + p_2$.

(A) (4 punti) Provare che p è sempre autoaggiunta.

(B) (4 punti) Provare che se U_1 e U_2 sono ortogonali tra loro allora p è la proiezione ortogonale su $U_1 + U_2$.

(C) (4 punti) Dire se esistono altri casi nei quali p è una proiezione ortogonale. [Aiuto: eventualmente limitarsi al caso in cui $W = \mathbb{R}^2$ e U_1, U_2 sono rette.]

2. Considerare la curva $\alpha : (-\infty, -1) \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(s) = \begin{pmatrix} 2s^2 - 3s \\ s - \cos(s) \\ s + \ln(1-s) \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che α è semplice e regolare.

(B) (4 punti) Determinare il riferimento di Frénet di α nel punto $s = 0$.

(C) (4 punti) Calcolare curvatura e torsione di α nel punto $s = 0$.

(D) (2 punti) Calcolare $\int_\beta y \, \mathrm{d}x$ dove β è la restrizione di α a $[-\pi, 0]$.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 26/6/18 — Quesiti

Risposte ai quesiti

5. ♢

1. $t \neq 2$

2. $p_A(t) = t^3 + 4t^2 - 7t - 5$

3. $\pm\frac{1}{\sqrt{255}}\begin{pmatrix} 11+7i \\ 6-7i \end{pmatrix}$

4. $\alpha = \pm\sqrt{74}$

5. Iperbole per $t < \frac{1}{2}$, parabola per $t = \frac{1}{2}$, ellisse per $\frac{1}{2} < t < 3$, un punto per $t = 3$, vuoto per $t > 3$

6. Un sottospazio proiettivo di dimensione 1 o 2

7. $k = \frac{3}{2}$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni degli esercizî

5. ♢

1.

(A) p_1 e p_2 sono autoaggiunte, e la somma di due applicazioni autoaggiunte lo è.

(B) Se U_1 e U_2 sono ortogonali fra loro poniamo $V = (U_1+U_2)^\perp$. Poiché $U_2+V \subset U_1^\perp$ e $U_1+V \subset U_2^\perp$, dati $u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2,\ v \in V$ abbiamo

$$p_1(u_1) = u_1, \quad p_1(u_2) = 0, \quad p_1(v) = 0, \quad p_2(u_1) = 0, \quad p_2(u_2) = u_2, \quad p_2(v) = 0$$

dunque $(p_1 + p_2)(u_1 + u_2 + v) = u_1 + u_2$, che è quello che dovevamo dimostrare.

(C) No. Se U_1 e U_2 sono rette non ortogonali nel piano, a meno di rotazioni possiamo supporre che siano generate da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \end{pmatrix}$, ma allora $(p_1 + p_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \cos^2(\vartheta) \\ \cos(\vartheta)\sin(\vartheta) \end{pmatrix}$ ha norma $1 + 3\cos^2(\vartheta) > 1$, assurdo.

In generale, supponiamo ch $p_1, p_2, p_1 + p_2$ siano proiezioni; allora

$$0 = (p_1 + p_2) - p_1 - p_2 = (p_1 + p_2) \circ (p_1 + p_2) - p_1 \circ p_1 - p_2 \circ p_2 = p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1.$$

Se $u_1 \in U_1$ abbiamo ora $p_1(p_2(u_1)) = -p_2(p_1(u_1)) = -p_2(u_1)$, ma l'unico vettore che una proiezione ortogonale mandi in meno sé stesso è quello nullo, dunque $p_2(u_1) = 0$. Abbiamo provato che $U_1 \subset U_2^\perp$, come voluto.

2.

(A) La seconda componente ha derivata non negativa e nulla solo in punti isolati, dunque è strettamente crescente. La terza componente ha derivata nulla solo in $s = 0$, dove le altre non si annullano.

(B) $t = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $n = \frac{1}{\sqrt{590}}\begin{pmatrix} 7 \\ 21 \\ -10 \end{pmatrix}$, $b = -\frac{1}{\sqrt{59}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

(C) $\kappa = \frac{\sqrt{59}}{10\sqrt{10}},\ \tau = \frac{14}{59}$

(D) $\frac{4}{3}\pi^3 + \frac{3}{2}\pi^2 - 8$

---

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$
