Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 4/6/19 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Per quali $t \in \mathbb{R}$ i vettori $-2e_1+e_2+(t+1)e_3-3e_4,\ (t-2)e_1-2e_2+3e_3-2e_4,\ -8e_1+(t+4)e_2+6e_3-5e_4$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^4$?

2. Per quale base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ si ha che $[6e_1 - 17e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ e $[-4e_1 + 9e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$?

3. Se $f : \mathbb{C}^7 \to \{z \in \mathbb{C}^3 :\ z_1 - iz_2 + (7+i)z_3 = 0\}$ è lineare surgettiva e $X \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, che dimensione può avere X?

4. Risolvere $\begin{cases} (2+i)z + 3w = 10 \\ -5z + (2+3i)w = 4 + 2i. \end{cases}$

5. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

6. In una matrice 4×4 una sottomatrice 2×2 ha determinante non nullo e due sue orlate hanno determinante nullo. Discutere quanto possa valere il rango della matrice a seconda della posizione delle due orlate di cui sopra.

7. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(2e_1 - e_2 + 2e_3)$, calcolare la proiezione su X di $-2e_1 + 7e_2 + 4e_3$ risetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 4/6/19 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^4$ considerare il sottospazio X di equazioni $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

(A) (4 punti) Esibire tutti i vettori di X aventi una coordinata nulla e le altre intere e prime fra loro, di cui positiva quella con indice minore.

(B) (4 punti) Ordinare i vettori trovati al punto (A) in modo che sia decrescente la somma delle coordinate, ed estrarre dal sistema di vettori così ordinato una base $\mathcal{B}$ di X.

(C) (4 punti) Detta $f : X \to X$ l'applicazione lineare tale che $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcolare

$$f(-3e_1 + 26e_2 - 4e_3 + 11e_4).$$

2. Considerare

$$U = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\} \qquad V = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0\}$$

$$w = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(A) (1 punto) Dire se esistano applicazioni lineari iniettive e/o surgettive da U a V.

(B) (1 punto) Dire se esistano applicazioni lineari iniettive e/o surgettive da V a U.

(C) (1 punto) Provare che w e y appartengono a V.

(D) (5 punti) Provare che la formula $f(x) = A \cdot x$ definisce un'applicazione lineare $f : U \to V$.

(E) (4 punti) Provare che posto $W = \mathrm{Span}(w)$ si ha $V = \mathrm{Im}(f) \oplus W$ e determinare la proiezione su $\mathrm{Im}(f)$ di y rispetto a tale decomposizione.

Risposte ai quesiti

5. $\diamondsuit$

1. $t \neq 3$

2. $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

3. Tra 0 e 2

4. $z = 1 + i,\ w = 3 - i$

5. 11

6. Se le due orlate coinvolgono una stessa riga e/o una stessa colonna, il rango può essere 2 o 3. Se esse coinvolgono righe diverse e colonne diverse, il il rango può essere 2, 3 o 4

7. $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni degli esercizî

5. ♢

1.

(A) $\begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 \\ -13 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ -26 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$

(B) L'ordine è il precedente; bisogna tenere i primi due vettori

(C) $\begin{pmatrix} -7 \\ 52 \\ -6 \\ 21 \end{pmatrix}$

2.

(A) Iniettive sì, surgettive no

(B) Iniettive no, surgettive sì

(C) Soddisfano l'equazione di V

(D) Moltiplicando A per due vettori che costituiscano una base di U, ad esempio $2e_1 + e_2,\ e_2 + 2e_3$, si ottengono due vettori di $\mathbb{R}^4$ che soddisfano l'equazione di V

(E) $\begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$