Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 25/6/19 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Calcolare $[-4e_1 - 3e_2 + 18e_3]_{\mathcal{B}}$ dove $\mathcal{B} = (e_1 + e_3,\ -2e_1 + e_2,\ 2e_2 - 3e_3)$.

2. Se $U, W \subset \{z \in \mathbb{C}^{11} :\ (2-i)z_4 + 7z_8 = 3iz_{11}\}$ sono sottospazi di dimensioni rispettive 6 e 7, che dimensione può avere $U \cap W$?

3. Se X, Y sono spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{R}$ e non esiste alcuna $g : X \to Y$ lineare iniettiva, può esistere una $h : Y \to X$ lineare surgettiva? Spiegare.

4. Stabilire quante sono al variare di $t \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema $\begin{cases} (1-t)x + (t-3)y = t+1 \\ 2(t-2)x + (3-4t)y = 2-t. \end{cases}$

5. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è lineare e $f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, calcolare $f^{-1}\begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}$.

6. Se $M = (c_1, c_2) \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ ha determinante $3 - 2i$ e $N = ((1-i)c_1 + 2ic_2,\ -3c_1 + (4+3i)c_2)$, calcolare $\det(N)$.

7. Provare che $A = \begin{pmatrix} 11 & -15 & 5 \\ 6 & -8 & 3 \\ -4 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ è la proiezione su X relativa a una decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$ e determinare Y.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 25/6/19 — Esercizî

1. Considerare il sottospazio X di $\mathbb{R}^5$ di equazione $4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 10x_4 + 15x_5 = 0$ e la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -5 & 1 \\ 5 & -3 & -2 & 0 \\ -7 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Esibire tutti i vettori di X aventi tre componenti nulle e le altre due intere e prime fra loro, di cui positiva quella con indice minore.

(B) (3 punti) Ordinare i vettori del punto precedente in modo che sia crescente la somma delle componenti e, a parità di essa, che sia decrescente la prima componente; estrarre dal sistema ordinato di vettori così trovato una base $\mathcal{B}$ di X.

(C) (3 punti) Calcolare il rango di A.

(D) (3 punti) Considerare la $f : X \to X$ lineare tale che $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = A$ ed esibire una base del suo nucleo.

2. In $\mathbb{R}^4$ considerare al variare di $t \in \mathbb{R}$ il sottospazio

$$V_t : \begin{cases} (t-1)x + (t+3)y - 12z + (4-2t)w = 0 \\ -6x + (3-3t)y + (4t-2)z + (t+4)w = 0. \end{cases}$$

(A) (4 punti) Trovare n, n_0, t_0 tale che V_t ha dimensione n per $t \neq t_0$ e dimensione n_0 per $t = t_0$.

(B) (4 punti) Trovare una base di X_t per $t = t_0$ e per $t = -1$.

(C) (4 punti) Stabilire per quali t si ha che V_t è contenuto nel sottospazio di equazione $y = 2z$.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. $\diamondsuit$

1. $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

2. Tra 3 e 6 compresi

3. No, perché Y ha dimensione minore di quella di X

4. Infinite per $t = -3$, nessuna per $t = \frac{3}{2}$, una altrimenti

5. $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

6. $31 + i$

7. $A \cdot A = A$; $Y = \mathrm{Span}(5e_1 + 3e_2 - 2e_3)$

---

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni degli eserciziî

5. ♢

1.

(A) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

(B) L'ordine è il precedente; bisogna prendere primo, secondo, terzo e quinto vettore

(C) 3

(D) $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

2.

(A) $n = 2$, $n_0 = 3$, $t_0 = 5$

(B) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(C) $t = 4$