Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 16/7/19 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Per quali $d \in \mathbb{N}$ esiste $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ di grado d tale che $p\left(\sqrt{2}\right) = 0$?

2. Trovare il vettore $v \in \mathbb{R}^2$ tale che posto $\mathcal{B} = (-4e_1 + 5e_2,\ v)$ si ha $[-3e_1 + 2e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$.

3. Se X, Y, Z sono spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{R}$ e $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ sono tali che $g \circ f$ è bigettiva, cosa si può dire sulla iniettività e la surgettività di f e g?

4. Risolvere $\begin{cases} -2x + 5y + 6z = -5 \\ 7x - 4y + z = 9 \\ 8x + 7y + 20z = 3. \end{cases}$

5. Data $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 5 & -4 & 1 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{2\,3}$.

6. Se $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è lineare in ciascuna colonna fissata l'altra, cambia segno scambiando le due colonne, e $f\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = 5$, quanto vale $f\begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$?

7. Sono dati uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ e due decomposizioni in somma diretta $V = X_1 \oplus Y_1$ e $V = X_2 \oplus Y_2$. Se la proiezione su X_1 associata alla prima decomposizione e quella su X_2 associata alla seconda coincidono, si può concludere che $X_1 = X_2$ e $Y_1 = Y_2$? Spiegare.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. Nello spazio $\mathbb{R}^4$ considerare il sottospazio V di equazione $3x + y - 2z + 5w = 0$. Porre inoltre

$$v_1(t) = \begin{pmatrix} t+4 \\ -t-5 \\ t+6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3-t \\ 2t+3 \\ t \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

dove t varia in $\mathbb{R}$

(A) (2 punti) Provare che $v_1(t), v_2(t), v_3, v$ appartengono sempre a V.

(B) (5 punti) Stabilire per quali t **interi** si ha che $(v_1(t), v_2(t), v_3)$ è una base di V, verificando in particolare che ciò avviene per $t = 1$.

(C) (5 punti) Posto $\mathcal{B} = (v_1(1), v_2(1), v_3)$ e indicata con $f : V \to V$ l'applicazione lineare tale che $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = A$, calcolare $f(v)$.

2. In $\mathbb{R}^3$ considerare i sottospazi affini così definiti da equazioni cartesiane

$$E(t) : \begin{cases} (t+1)x + (3t+1)y - 2tz = t - 5 \\ (1-t)x - (t+2)y + (2t-3)z = t - 2 \end{cases} \qquad F : \; x - y + 2z = 3$$

dove t varia in $\mathbb{R}$.

(A) (2 punti) Calcolare la dimensione di F e trovarne una presentazione parametrica.

(B) (4 punti) Determinare t_0, n_0, n tale che $E(t)$ ha dimensione n_0 per $t = t_0$ e n per $t \neq t_0$.

(C) (3 punti) Esibire una presentazione parametrica di $E(t_0)$ e di $E(4)$.

(D) (3 punti) Dire per quali t si ha che $E(t)$ è parallelo a F.

Risposte ai quesiti

5. $\diamondsuit$

1. $d \geqslant 2$

2. $3e_1 - 4e_2$

3. f è sempre iniettiva e g è sempre surgettiva; inoltre f è surgettiva se e solo se g è iniettiva

4. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 29 \\ 44 \\ -27 \end{pmatrix}$ con $t \in \mathbb{R}$

5. $-\frac{19}{10}$

6. -1

7. Sì: se p è la comune proiezione, si ha $X_1 = X_2 = \mathrm{Im}(p)$ e $Y_1 = Y_2 = \mathrm{Ker}(p)$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni degli esercizî

5. $\diamondsuit$

1.

(A) Soddisfano l'equazione di V.

(B) $t \neq -2$

(C) $\begin{pmatrix} 10 \\ -23 \\ 26 \\ 9 \end{pmatrix}$

2.

(A) Dimensione 2; presentazione $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

(B) $t_0 = 3,\ n_0 = 2,\ n = 1$

(C) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right); \qquad \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 17 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$

(D) $t = -\frac{1}{2}$