UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 13/9/19 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Dati 5 vettori linearmente indipendenti in $\{p(z) \in \mathbb{C}_{\leqslant 9}[\mathbb{C}] : \ p(-i) = p'(2) = 0\}$, quanti bisogna aggiungerne per ottenere una base?

2. Se $f : \{x \in \mathbb{R}^6 : \ 7x_2 = 4x_5\} \to \mathbb{R}^{11}$ è lineare iniettiva e $\mathbb{R}^{11} = X \oplus \mathrm{Im}(f)$, che dimensione ha X?

3. Se $\mathcal{B} = (-3e_1 + e_2, \ 4e_1 - 5e_2)$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è lineare e tale che $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, quanto vale $f(5e_1 + 2e_2)$?

4. Data $A = \begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ 3+2i & 1+4i \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{1\,2}$.

5. Calcolare i determinanti delle orlate di $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

6. Risolvere $z^2 \cdot \overline{z} - \overline{z}^2 \cdot z + \overline{z}(4 + iz) - 4z(1 + i\overline{z}) + 12i = 0$.

7. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(7e_1 + e_2 - 3e_3)$ calcolare la proiezione di $-3e_1 + 5e_2 + e_3$ su X rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 13/9/19 — Esercizî

1. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare $\begin{cases} (t-1)x + (t-4)y = 11 - 2t \\ (11-3t)x + (2-t)y = 2t - 9. \end{cases}$

Prendere inoltre la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, il vettore $q = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e il sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ di equazione $-3x + y + 2z = 0$.

(A) (4 punti) Risolvere il sistema per $t = 6$.

(B) (4 punti) Determinare il valore di t_1 di t per cui il sistema ha infinite soluzioni e il valore t_2 per cui è impossibile.

(C) (4 punti) Detta V la giacitura dello spazio delle soluzioni del sistema per $t = t_1$ e posto $U = A(V)$, provare che $\mathbb{R}^3 = W \oplus U$ e calcolare la proiezione di q su W rispetto a questa decomposizione.

2. In $\mathbb{R}^4$ considerare i sottospazi affini

$$E : \begin{cases} x + y - z - w = 1 \\ y + z + 2w = 7 \\ x + 2y + z - w = 1 \end{cases} \qquad F = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right).$$

(A) (3 punti) Trovare una presentazione parametrica di E.

(B) (3 punti) Trovare una presentazione cartesiana di F.

(C) (3 punti) Provare che E ed F sono paralleli tra loro.

(D) (3 punti) Scegliere un generatore della giacitura di E e trovarne le coordinate rispetto alla base della giacitura di F sopra assegnata.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. ♢

1. 3

2. 6

3. $-15e_1 + 38e_2$

4. $-\frac{1}{29}(7+3i)$

5. -77 e -95

6. $|z| = 2$ oppure $\mathrm{Im}(z) = \frac{3}{2}$

7. $-31e_1 + e_2 + 13e_3$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni degli esercizî

5. ♢

1.

(A) $x = \frac{1}{3},\ y = -\frac{4}{3}$

(B) $t_1 = 7$, $t_2 = 3$.

(C) $\begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix}$

2.

(A) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{cases} 14x + 13y - 23z = 44 \\ 3y + 13z - 14w = 78 \end{cases}$

(C+D) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$