UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 29/1/19 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Dire se il numero $x = -\frac{7}{3} + \sqrt{32}$ sia razionale. Spiegare.

2. Calcolare $\left[\begin{pmatrix} -12 \\ 17 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}}$ dove $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$.

3. Se $X = \{x \in \mathbb{R}^9 : \ 5x_2 = 7x_8\}$, la $f : \mathbb{R}^5 \to X$ è lineare iniettiva e $U \subset X$ è un sottospazio tale che $\mathrm{Im}(f) \cap U = \{0\}$, che dimensione può avere U?

4. Risolvere $\begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ x + 4y + 5z = 16 \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$

5. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è lineare, $f(3e_1 - e_2) = 5e_1 + 2e_2$ e $f(2e_1 + e_2) = -4e_1 + 3e_2$, quanto vale $f^{-1}(-2e_1 + 13e_2)$?

6. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

7. Posto $X = \mathrm{Span}(2e_1 - e_3,\ 3e_1 + e_2 - 2e_4)$ e $Y = \mathrm{Span}(2e_2 + e_3,\ e_1 + 3e_4)$, calcolare la proiezione su X di $-e_1 + 8e_2 + 2e_3 + e_4$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^4 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 29/1/19 — Esercizî

1. Considerare in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio V di equazione $17x_1+13x_2-11x_3=0$ e i vettori $v_1=5e_1-4e_2+3e_3$ e $v_2=2e_1+5e_2+9e_3$.

(A) (4 punti) Provare che $\mathcal{B}=(v_1,v_2)$ è una base di V.

(B) (4 punti) Provare che l'espressione

$$f(x)=\begin{pmatrix} -7x_1-3x_2+6x_3 \\ -7x_1-4x_2+4x_3 \\ -16x_1-7x_2+12x_3 \end{pmatrix}$$

definisce un'applicazione lineare $f:V\to V$ e trovare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

(C) (4 punti) Data l'applicazione $g:V\to V$ tale che $[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} 8 & 13 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ calcolare $g(8e_1-13e_2-3e_3)$.

2. Al variare di $t\in\mathbb{R}$ considerare il sottospazio affine E_t di $\mathbb{R}^3$ di equazioni

$$\begin{cases} (3t+1)x+(t+2)y-5tz=7t+9 \\ (5-3t)x+(t-5)y+(t+3)z=-4t. \end{cases}$$

(A) (4 punti) Trovare equazioni parametriche di E_t per $t=1$.

(B) (4 punti) Determinare il valore di t per il quale E_t non è una retta e trovarne equazioni parametriche.

(C) (4 punti) Stabilire per quale t la retta generata da $\begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$ è parallela a E_t.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. $\diamondsuit$

1. No; se lo fosse, lo sarebbe $\frac{1}{4}\left(\frac{7}{3}+x\right)=\sqrt{2}$

2. $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

3. Tra 0 e 3 compresi

4. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

5. $12e_1 + e_2$

6. -3

7. $-2e_2 - 3e_3 + 4e_4$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni degli esercizî

5. ♢

1.

(A) V ha dimensione 2 e i vettori v_1, v_2 gli appartengono e sono linearmente indipendenti

(B) $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 11 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 17 \\ -7 \\ 18 \end{pmatrix}$

2.

(A) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix}$

(B) $t = 3$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

(C) $t = -1$