UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 29/1/19 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Dire se il numero $x = -\frac{5}{4} + \sqrt{27}$ sia razionale. Spiegare.

2. Calcolare $\left[\begin{pmatrix} -16 \\ 27 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}}$ dove $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \end{pmatrix}\right)$.

3. Se $X = \{x \in \mathbb{R}^9 : \ 5x_2 = 7x_8\}$, la $f : X \to \mathbb{R}^5$ è lineare surgettiva e $U \subset X$ è un sottospazio tale che $\mathrm{Ker}(f) + U = X$, che dimensione può avere U?

4. Risolvere $\begin{cases} 3x + y - 2z = 10 \\ x + 5y + 4z = 8 \\ 2x + 3y + z = 9. \end{cases}$

5. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è lineare, $f(3e_1 + e_2) = 4e_1 + e_2$ e $f(7e_1 + e_2) = 5e_1 - 3e_2$,
quanto vale $f^{-1}(-7e_1 + 11e_2)$?

6. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ -8 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

7. Posto $X = \mathrm{Span}(2e_1 - e_3,\ 3e_1 + e_2 - 2e_4)$ e $Y = \mathrm{Span}(2e_2 + e_3,\ e_1 + 3e_4)$,
calcolare la proiezione su X di $-6e_1 + 7e_2 + 3e_3 + 3e_4$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^4 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. Considerare in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio V di equazione $7x_1 - 29x_2 + 10x_3 = 0$ e i vettori $v_1 = 18e_1 + 4e_2 - e_3$ e $v_2 = 5e_1 + 5e_2 + 11e_3$.

(A) (4 punti) Provare che $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ è una base di V.

(B) (4 punti) Provare che l'espressione

$$f(x) = \begin{pmatrix} 7x_1 - 26x_2 + 9x_3 \\ -x_1 + 6x_2 - 3x_3 \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

definisce un'applicazione lineare $f : V \to V$ e trovare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

(C) (4 punti) Data l'applicazione $g : V \to V$ tale che $[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ calcolare $g(3e_1 - 11e_2 - 34e_3)$.

2. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare il sottospazio affine E_t di $\mathbb{R}^3$ di equazioni

$$\begin{cases} (t+1)x + (4t-1)y + (2-3t)z = -5t \\ (t-6)x + (2-2t)y + tz = t+4. \end{cases}$$

(A) (4 punti) Trovare equazioni parametriche di E_t per $t = 2$.

(B) (4 punti) Determinare il valore di t per il quale E_t non è una retta e trovarne equazioni parametriche.

(C) (4 punti) Stabilire per quale t la retta generata da $\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}$ è parallela a E_t.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. ♡

1. No; se lo fosse, lo sarebbe $\frac{1}{3}\left(\frac{5}{4}+x\right)=\sqrt{3}$

2. $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

3. Tra 5 e 8 compresi

4. $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. $-15e_1 - e_2$

6. -2

7. $-5e_1 - 3e_2 - 2e_3 + 6e_4$

Soluzioni degli esercizî

5. ♡

1.

(A) V ha dimensione 2 e i vettori v_1, v_2 gli appartengono e sono linearmente indipendenti

(B) $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 11 & -16 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} -59 \\ -17 \\ -8 \end{pmatrix}$

2.

(A) $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$

(B) $t = 4$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$

(C) $t = -2$