Geometria 13/3/19

$A \subset \mathbb{R}^n$ aperto se da ogni punto di A ci si può spostare un po' in ogni direz. senza uscire da A.

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $f: A \to \mathbb{R}$. Se $x \in A, v \in \mathbb{R}^n$ posso esaminare quanto varia f se da x mi sposto in direzione v: chiamo derivata direzionale di f in x in direzione v

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \frac{\partial f}{\partial v}(x).$$

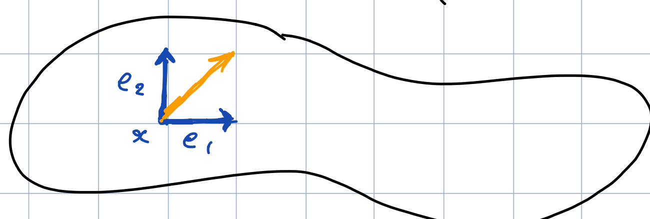
Inoltre chiamo derivata parziale j-esima di f in x

$$\frac{\partial f}{\partial e_j}(x) \quad \text{cioè} \quad \lim_{t \to 0} \frac{f(x+te_j) - f(x)}{t}.$$

Cioè: faccio la derivata considerando solo l'incremento della j-esima variabile (le altre fisse).

Es: $f(x,y,z) = e^{5x^2y^9z^3} \cdot \cos(2x - 6y^4 + 7z^8)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = (5x^2z^3)\cdot(9y^8)e^{5x^2y^9z^3} \cdot \cos(\dots)$$
$$+ e^{5x^2y^9z^3} \cdot \left(-\sin(\dots)\cdot(-24y^3)\right).$$



$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = +7$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -3$$

$$\frac{\partial f}{\partial(e_1+e_2)} = 4$$

Fatto: $\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot v_n$

(in ipotesi ragionevoli).

Derivazione di funzioni composte:

$$\left(g(f(x))\right)' = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Versione in più variabili:

$$g = g\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \qquad f_j = f_j\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$g(f(x)) = g\begin{pmatrix} f_1\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ \vdots \\ f_m\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Fatto: $\frac{\partial g(f(x))}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$.

quanto cambia $g \circ f$ in direz. j

quanto cambia g in direz. y_i

quanto cambia $f_i = y_i$ in direz. j.

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k \qquad \text{(oppure su aperti)}$$

Def: chiamo differenziale di f $\quad df = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} \in M_{m \times n}$

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$dg = \left(\frac{\partial g_p}{\partial y_i} \right)_{\substack{p=1..k \\ i=1\dots m}}$$

$$\frac{\partial (g\circ f)_p}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_p}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{d(g\circ f)(x)}_{p\times n} = \underbrace{dg(f(x))}_{p\times m} \cdot \underbrace{df(x)}_{m\times p}$$

prodotto righe x colonne

Def: se $A \subset \mathbb{R}^n$ è aperto e $f : A \to \mathbb{R}$ chiamo derivate parziali seconde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

Notaz: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ si scrive $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Es: $f(x,y) = x^2 y^3 \cdot \cos(x^4+y^7)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 \cos(x^4+y^7) - 4x^5y^3 \sin(x^4+y^7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 \cdot \cos(x^4+y^7) - 7x^2y^9 \sin(x^4+y^7)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3 \cdot c - 8x^4y^3 \cdot s - 20x^4y^3 \cdot s - 12x^8y^3 \cdot c$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2 \cdot c - 14xy^9 \cdot s - 12x^5y^2 \cdot s + 28x^5y^9 \cdot s$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2 \cdot c - 12x^5y^2 \cdot s - 14xy^9 \cdot s + 28x^5y^9 \cdot s$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dots$$

Fatto: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ (in ipotesi ragionevoli)

———— o ————

Def: chiamo gradiente di f $\quad \operatorname{grad}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ e

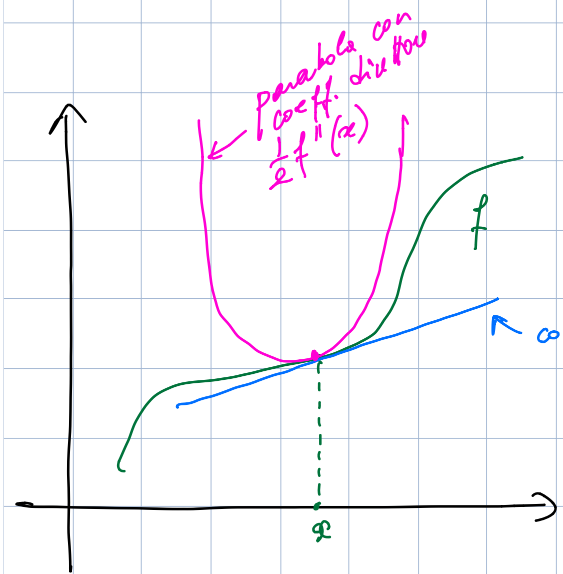
matrice hessiana di f $\quad H(f) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1\dots n}$

matrice simmetrica

In una variabile: formula di approx di Taylor II ordine

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot h + \frac{1}{2} f''(x)\cdot h^2 + \underbrace{o(h^2)}$$

una funzione che tende a 0 più rapidamente di h^2 per $h \to 0$. cioè una $\phi(h)$ t.c. $\lim_{h\to 0} \frac{\phi(h)}{h} = 0$.



Ne segue:

- se f ha min. in x ho $f'(x)=0$, $f''(x) \geq 0$
- se $f'(x)=0$, $f''(x)>0$ allora f ha min. in x.

Analogo per $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto.

Prop: $f(x+v) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\cdot v_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\cdot v_i \cdot v_j + o(\|v\|^2)$

Oss: posso riscriverla così:

$$f(x+v) = f(x) + \langle \operatorname{grad}(f) | v \rangle_{\mathbb{R}^n} + \frac{1}{2} \langle v | v \rangle_{H(f)} + o(\|v\|^2)$$

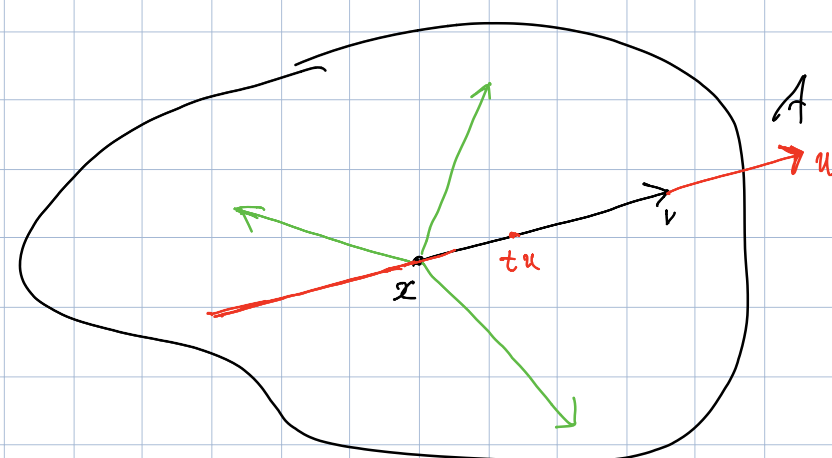
Conseguenza: se f ha min. in x allora $\mathrm{grad}(f)(x) = 0$.
(Se qualche $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ è $\neq 0$ nella direz. x la f cresce o decresce).

Q: qual è l'analogo dello studio del segno di $f''(x)$ nel caso di n variabili $H(f)(x) \in M_{n\times n}$ simmetrica

Cenno di dimo di Taylor n-dim usando Taylor 1-dim

Voglio approssimare $f(x+v)$ per $\|v\| << 1$.
Pongo $u = \frac{v}{\|v\|}$, $t = \|v\|$ dunque $v = t \cdot u$ e $0 < t << 1$, dunque
$$f(x+v) = f(x+tu)$$ che vedo come funzione di t.

IMBROGLIO:



$g(t) = f(x+tu)$; Taylor 1-dim: $g(t) = g(0) + g'(0)\cdot t + \frac{1}{2} g''(0)\cdot t^2 + o(t^2)$

$g(0) = f(x+0) = f(x)$
$g'(t) = \frac{d}{dt} f(x+tu) = \frac{d}{dt} f(x_1+tu_1, \dots, x_n+tu_n)$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+tu) \cdot u_i$$

$$g'(0) \cdot t = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \underbrace{t u_i}_{v_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot v_i$$

$$g''(0) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \cdot u_i \cdot u_j$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} g''(0) \cdot t^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot \underbrace{t u_i}_{v_i} \cdot \underbrace{t u_j}_{v_j}$$

$$t = \|v\| \qquad o(t^2) = o(\|v\|^2)$$

V sp. vett. su $\mathbb{R}$ con $\langle \cdot | \cdot \rangle$ prod. scal. e $\dim_{\mathbb{R}}(V) < +\infty$.

<u>Visto</u>: W sttsp. , $W^{\perp} = \{ v : \langle v|w \rangle = 0 \ \forall w \in W \}$

$\Rightarrow V = W \oplus W^{\perp}$; P_W = proiez. ortog. su W

= proiez. su W risp. a tale $\oplus$.

<u>Prop</u>: se $w_1, \dots, w_k$ è una base ortogonale di W ho

$$P_W(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v | w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i .$$

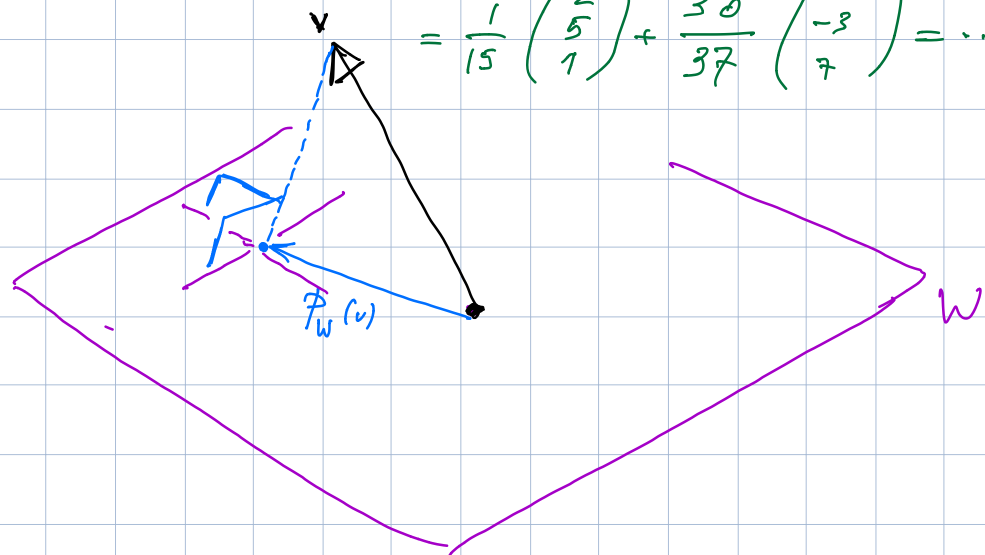
<u>Es</u>: $W = \mathrm{Span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}}_{} \right) \subset \mathbb{R}^3$

$2 \cdot 4 + 5 \cdot (-3) + 1 \cdot 7 = 0$

è base ortog. di W.

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad P_W(v) = \frac{3\cdot 2 + (-2)\cdot 5 + 6\cdot 1}{4+25+1}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3\cdot 4 + (-2)\cdot(-3) + 6\cdot 7}{16+9+49}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{30}{37}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \dots$$



finire i conti per $P_W(v)$ e verificare che $v - P_W(v)$ è $\perp$ ai due generatori di W.

<u>Dimo</u>: $P_W(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v | w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i$

Completo $w_1, \dots, w_k$ a base ortogonale $w_1, \dots, w_n$ di V:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v | w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v | w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i}_{\in W} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} \frac{\langle v | w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i}_{\in W^\perp}$$

$i > k$
$\Rightarrow \langle w_i | w_j \rangle = 0 \quad j = 1 \dots k$
$\Rightarrow w_i \perp w_j \quad j = 1 \dots k$
$\Rightarrow w_i \in W^\perp$

$\Longrightarrow$ la prima somma è $p_W(v)$. $\boxed{}$

Prop: $p_W(v)$ è il punto di W più vicino a v.

Dimo: un generico pto di W è $t_1w_1+\dots+t_kw_k$.
La sua distanza da v è

$$\|v-(t_1w_1+\dots+t_kw_k)\|.$$

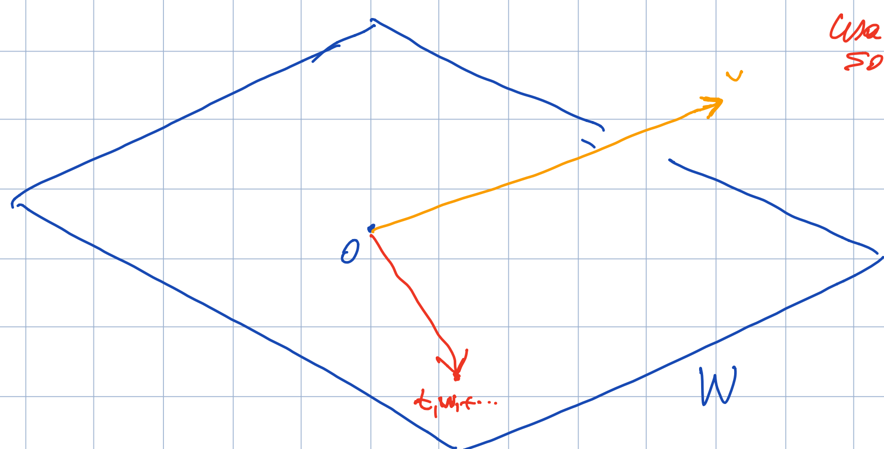
Devo provare che essa è minima solo se $t_i = \dfrac{\langle v|w_i\rangle}{\|w_i\|^2}$.

È una funz. positiva di $t_1,\dots,t_k$: chiedere che sia minima in $t_i=\dots$ equivale a chiedere che lo sia $\|\cdot\|^2$

$$f(t_1,\dots,t_k) = \|v-(t_1w_1+\dots+t_kw_k)\|^2$$

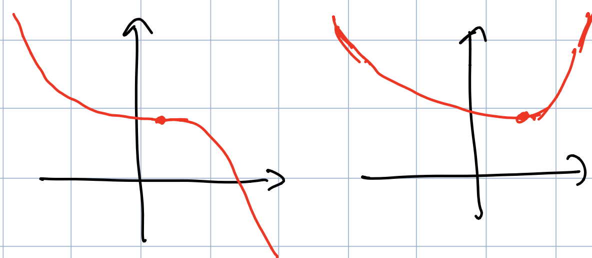
$$= \|v\|^2 - 2\langle v|t_1w_1+\dots+t_kw_k\rangle + \|t_1w_1+\dots+t_kw_k\|^2$$

$$= \|v\|^2 - 2\langle v|w_1\rangle t_1 + \dots - 2\langle v|w_k\rangle\cdot t_k + \underbrace{\|w_1\|^2\cdot t_1^2+\dots+\|w_k\|^2\cdot t_k^2}_{\text{usato che } w_1\dots w_k \text{ sono } \perp \text{ tra loro}}$$



Oss: $\lim_{\|t\| \to \infty} f(t) = +\infty$

dunque se provo che c'è un unico punto in cui le derivate parziali si annullano esso è di min.



$$f(t_1,\dots,t_k) = \|v\|^2 - 2\langle v|w_1\rangle t_1 + \dots - 2\langle v|w_k\rangle \cdot t_k + \|w_1\|^2 \cdot t_1^2 + \dots + \|w_k\|^2 \cdot t_k^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_i} = -2\langle v|w_i\rangle + \|w_i\|^2 \cdot 2t_i$$

nullo precisamente per $t_i = \dfrac{\langle v|w_i\rangle}{\|w_i\|^2}$. $\blacksquare$

Prop (disuguaglianza di Bessel): se $w_1,\dots,w_k$ sono ortog. fra loro $\neq 0$ e $v \in V$ allora
$$\sum_{i=1}^{k} \frac{|\langle v|w_i\rangle|^2}{\|w_i\|^2} \leq \|v\|^2$$
(vale anche se $\dim(V) = +\infty$).

Dimo (con $\dim(V) < +\infty$):

$$v = P_W(v) + P_{W^\perp}(v)$$

ortog. fra loro

$$\Rightarrow \|v\|^2 = \|P_W(v)\|^2 + \|P_{W^\perp}(v)\|^2$$

$$\geq \|P_W(v)\|^2$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v|w_i\rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i \right\|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left\| \frac{\langle v|w_i\rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i \right\|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{|\langle v|w_i\rangle|^2}{\|w_i\|^{\cancel{4}\,2}} \cdot \cancel{\|w_i\|^2} \quad . \qquad \blacksquare$$

Interpretazione via $\langle \cdot | \cdot \rangle$ delle equaz. cart/param. di rette/piani in $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$.

$\underline{\underline{\mathbb{R}^2}}$. eq. cart. di retta r:

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^2} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^\perp$$

$$= \left(\operatorname{Span}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)^\perp$$

ovvero : $r^\perp = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Dunque: dare una presentaz. cart. di una retta r equivale a dare una presentaz. param. di $r^\perp$

$\mathbb{R}^3$: piano cart P:

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : ax + by + cz = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = 0 \right\}$$

$$= \left(\mathrm{Span}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right)^\perp$$

$$P^\perp = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Dunque: dare una presentaz. cart. di piano P equivale a dare una presentaz. param. della retta $P^\perp$.