Geometria 20/3/19

V sp. vett. su $\mathbb{R}$ con $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Def: chiamo $f: V \to V$ lineare autoaggiunta se
$$\langle f(v_1) | v_2 \rangle = \langle v_1 | f(v_2) \rangle \quad \forall v_1, v_2 \in V$$

Prop: $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ è autoaggiunta come appl. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ rispetto a $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n} \iff {}^tA = A$ (A simmetrica).

Dim: $\Leftarrow$: $\langle A \cdot x | y \rangle_{\mathbb{R}^n} = {}^t(Ax) \cdot y = {}^tx \cdot {}^tA \cdot y = {}^tx \cdot A \cdot y$
$= \langle x | Ay \rangle_{\mathbb{R}^n}$.

$\Rightarrow$: $\langle Ax | y \rangle = \langle x | Ay \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

ovvero $({}^t(Ax)) y = {}^tx \cdot Ay \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

${}^tx \cdot {}^tA \cdot y = {}^tx \cdot A \cdot y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

${}^tx \cdot ({}^tA - A) y = 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$\langle x | ({}^tA - A) y \rangle = 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$\forall y \in \mathbb{R}^n$ ho che $({}^tA - A) \cdot y$ è ortog. a ogni $x \in \mathbb{R}^n$
in part. a sé stesso

dunque $({}^tA - A) y = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$

dunque ${}^tA - A = 0$. $\blacksquare$

Di nuovo V con $\langle \cdot | \cdot \rangle$ e $\dim_{\mathbb{R}}(V) < +\infty$.

Prop: $f: V \to V$ è proiez. ortog $\Longleftrightarrow$ $f \circ f = f$ e f autoaggiunta.

Dim: $\Longrightarrow$: sappiamo che $f \circ f = f$ $\forall f$ proiez. rispetto a qualsiasi $\oplus$

Sia $f = p_W$ e $Z = W^\perp$.

Presi $v_1, v_2 \in V$ dobbiamo vedere che $\langle f(v_1) | v_2 \rangle = \langle v_1 | f(v_2) \rangle$.

$$v_1 = \underbrace{w_1}_{\substack{\| \\ f(v_1) \\ \Uparrow \\ W}} + \underbrace{z_1}_{\substack{\Uparrow \\ W^\perp}} \qquad v_2 = \underbrace{w_2}_{\substack{\| \\ f(v_2) \\ \Uparrow \\ W}} + \underbrace{z_2}_{\in W^\perp}$$

$$\langle f(v_1) | v_2 \rangle = \langle w_1 | w_2 + z_2 \rangle = \langle w_1 | w_2 \rangle + \cancel{\langle w_1 | z_2 \rangle}$$

$$\langle v_1 | f(v_2) \rangle = \langle w_1 + z_1 | w_2 \rangle = \langle w_1 | w_2 \rangle + \cancel{\langle z_1 | w_2 \rangle}$$

$\Longleftarrow$: Supponiamo $\underbrace{f \circ f = f}$ e f autoaggiunta.

$\Downarrow$

f è proiez. su W rispetto a una $V = W \oplus Z$

anzi $W = \mathrm{Im}(f)$, $Z = \mathrm{Ker}(f)$.

Resta da vedere che $Z = W^\perp$. Prendo $z \in Z$ e $w \in W$

$$\langle z | w \rangle = \langle z | f(w) \rangle = \langle f(z) | w \rangle = \langle 0 | w \rangle = 0.$$

Ho provato che $z \in W^\perp$ quindi che $Z \subset W^\perp$.

Se $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$ ho

$$\dim(Z) = \dim(W^\perp) = n - m$$

$$\Longrightarrow Z = W^\perp.$$

$\blacksquare$

Cor: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ rappresenta la proiez. ortog. su sttsp. di $\mathbb{R}^n \iff A^2 = A \ , \ {}^tA = A$.

Esempio: Su $\mathbb{R}^3$ $\quad W: 7x - 5y + 2z = 0$

cioè $\quad W^\perp = r = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Voglio la matrice di P_W. (proiez. ortog).

I metodo: trovare w_1, w_2 base ortonorm. di W e scrivere

$$P_W\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| w_1 \right\rangle \cdot w_1 + \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| w_2 \right\rangle \cdot w_2$$

$$= A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Calcoli lunghetti...

II metodo:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P_W\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + P_r\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_W\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - P_r\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{49+25+4} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{7x - 5y + 2z}{78} \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{78}\begin{pmatrix} 29 & 35 & -14 \\ 35 & 53 & 10 \\ -14 & 10 & 74 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

evidente la simmetria.

Fatto: $A^2 = A$ (verificare)

Def: dato V con $\langle . | . \rangle$ e $f: V \to V$ lineare dico f ortogonale rispetto a $\langle . | . \rangle$ se $\langle f(v_1) | f(v_2) \rangle = \langle v_1 | v_2 \rangle$.

Oss: f ortog. (f preserva prod. scal.)

ovvio $\Downarrow$ $\Uparrow$ perché $\|.\|$ determina $\langle . | . \rangle$

$\|f(v)\| = \|v\| \ \forall v$ (f preserva la norma)

$\Updownarrow$

$\underbrace{d(f(v_1), f(v_2)) = d(v_1, v_2)}$ (f preserva la distanza)

$\to$ f è una *isometria*

Oss: $\forall A \in M_{n \times n}$ $\langle x | Ay \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle {}^tA \cdot x | y \rangle_{\mathbb{R}^n}$ (visto prima).

Prop: $A \in M_{n \times n}$ rappresenta una isometria per $\langle . | . \rangle_{\mathbb{R}^n}$ (cioè è matrice ortogonale)

$\iff \exists A^{-1} = {}^tA$.

Dim: $\Leftarrow$: $\langle Ax | Ay \rangle = \langle {}^tA \cdot Ax | y \rangle = \langle x | y \rangle$.

$\Rightarrow$: (Se $Ax = 0$ ho $\langle Ax | Ae_j \rangle = 0 \quad \forall j = 1 \dots n$
dunque $\langle x | e_j \rangle = 0 \ \forall j = 1, \dots, n \Rightarrow x = 0$
dunque A è iniettiva, dunque invertibile.)

non serve

So che $\langle Ax | Ay \rangle = \langle x | y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle {}^tAAx | y \rangle = \langle x | y \rangle \quad \text{'' ''}$$

$$\langle {}^tAAx - x | y \rangle = 0 \quad \text{'' ''}$$

$$\langle ({}^tAA - I_n)x | \underline{y} \rangle = 0 \quad \text{'' ''}$$

$$\Rightarrow ({}^tAA - I_n)\overline{x} = 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow {}^tA \cdot A - I_n = 0$$

$$\Rightarrow {}^tA \cdot A = I_n . \qquad \boxtimes$$

Oss: Se A è ortogonale ho $A^{-1} = {}^tA$

$$\Rightarrow \underbrace{\det(A^{-1})}_{= \frac{1}{\det(A)}} = \underbrace{\det({}^tA)}_{= \det(A)}$$

$$\Rightarrow \det(A)^2 = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1 .$$

Matrici ortog 2×2 : $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \pm \begin{pmatrix} w & -y \\ -z & x \end{pmatrix} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$$

$+$ $\quad x = w \quad y = -z \Rightarrow A = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$

$$\det(A) = c^2 + s^2 = 1$$

dunque $c = \cos(\vartheta)$
$\quad\quad s = \sin(\vartheta)$

rappresenta la rotazione intorno all'origine di angolo ϑ

$\ominus$ $\quad w = -x \quad z = y \Rightarrow A = \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}$

$$\det(A) = -c^2 - s^2 = -1$$

dunque $c = \cos(\vartheta)$

$s = \sin(\vartheta)$

Se chiamo $C = \cos(\vartheta/2)$ $\quad S = \sin(\vartheta/2)$ ho

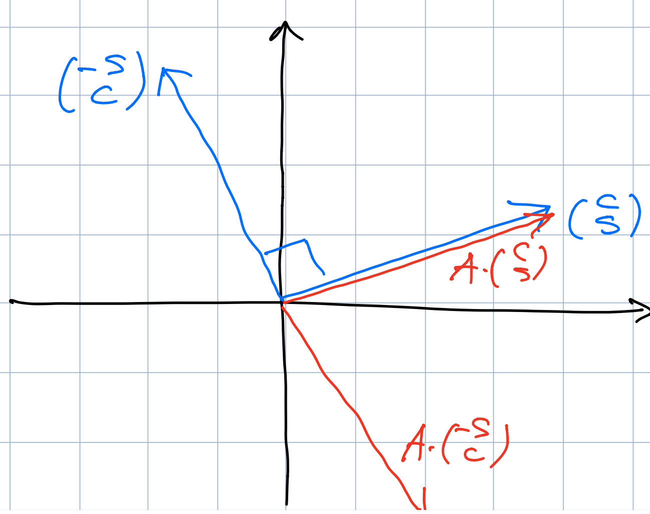
$$A = \begin{pmatrix} C^2 - S^2 & 2SC \\ 2SC & S^2 - C^2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} C \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 - S^2 & 2SC \\ 2SC & S^2 - C^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ S \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C^3 - CS^2 + 2CS^2 \\ 2SC^2 + S^3 - SC^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(C^2 + S^2) \\ S(C^2 + S^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ S \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} -S \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 - S^2 & 2SC \\ 2SC & S^2 - C^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -S \\ C \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -SC^2 + S^3 + 2SC^2 \\ -2S^2C + S^2C - C^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(C^2 + S^2) \\ -C(C^2 + S^2) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -S \\ C \end{pmatrix}$$



$\Rightarrow$ A rappresenta la riflessione rispetto alla retta generata da $\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$.

Prop: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è ortogonale se e solo se le sue colonne costituiscono una base ortonormale.

Dim: $A = (u_1, \dots, u_n)$;

A ortogonale $\Leftrightarrow \exists A^{-1} = {}^tA \Leftrightarrow {}^tA \cdot A = I_n$

$\Leftrightarrow ({}^tA \cdot A)_{ij} = \delta_{ij}$

$\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} {}^tu_1 \\ \vdots \\ {}^tu_n \end{pmatrix} \cdot (u_1, \dots, u_n) \right)_{ij} = \delta_{ij}$

$\Leftrightarrow {}^tu_i \cdot u_j = \delta_{ij}$

$\Leftrightarrow \langle u_i | u_j \rangle = \delta_{ij}$

$\Leftrightarrow u_1, \dots, u_n$ ortonormale (base: sono n e lin. indip.)

Usando ciò posso ritrovare le ortog 2×2:

(u_1, u_2) ortonormale

$\Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \qquad u_2 = \pm \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix}$.

Esercizi:

$\boxed{9.2.5}$ (k) $\quad M_{2\times 2} \quad \langle A|B\rangle = tr\left({}^tA \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot B \right)$

ortonormalizzare

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right\|^2 = tr\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= tr\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} \right) = 15 + 23 = 38$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{38}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$z_2 = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle}{38} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \frac{tr\left(\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} \right)}{38} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \frac{-30+15}{38} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \ldots$$

calcolare $u_2 = \dfrac{z_2}{\|z_2\|}$.

(m) $\quad V = \mathbb{R}[t] \quad \langle p(t)|q(t)\rangle = \displaystyle\int_0^1 p(s)\cdot q(s)\, ds$

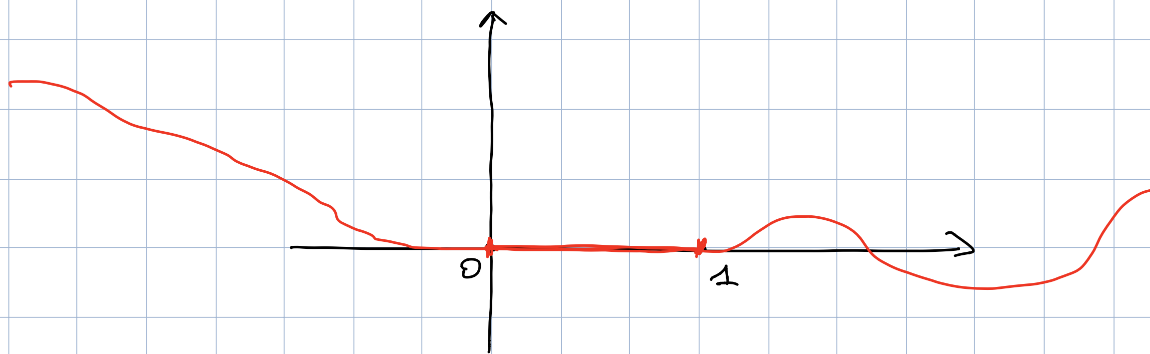
$v_1 = 1+2t-t^2, \quad v_2 = 2-t+3t^2.$

Perché prod. scal? Bilin. ovvio, simm. ovvio, $\langle p(t)|p(t)\rangle \geq 0$ ovvio

$$\langle p(t)|p(t)\rangle = 0 \implies \int_0^1 p(s)^2\, ds = 0$$

$\Rightarrow$ poiché p è continua $p(s) = 0 \quad \forall s \in [0,1]$

$\Rightarrow$ poiché è un polinomio $p(t) = 0$



$$\| 1+2t-t^2 \|^2 = \int_0^1 (1+2s-s^2)^2 \, ds$$

$$= \int_0^1 \left(1 + \cancel{4s^2}^{\,2} + s^4 + 4s - \cancel{2s^2} - 4s^3 \right) ds$$

$$= \cancel{1} + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + 2 - \cancel{1} = \frac{43}{15}$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{15}{43}} \cdot (1+2t-t^2)$$

$$z_2 = 2-t+3t^2 - \frac{15}{43} \underbrace{\left(\int_0^1 (1+2s-s^2)(2-s+3s^2) \, ds \right)}_{\text{calcolare}} \cdot (1+2t-t^2)$$

$\|z_2\| = \ldots \qquad u_2 = z_2 / \|z_2\|$.

(n) $\mathbb{R}_{\leq 2}[t] \qquad \langle p(t) | q(t) \rangle = p(-1) \cdot q(-1) + p(1) \cdot q(1) + p(2) \cdot q(2)$

$r_1 = t - 2t^2 \qquad r_2 = t$.

$$\|v_1\|^2 = (-3)^2 + (-1)^2 + (-6)^2 = 46$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{46}}(t - 2t^2)$$

$$z_2 = \underbrace{t - \frac{1}{46}\Big(\underbrace{(-3)\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 + (-6)\cdot 2}\Big)\cdot(t - 2t^2)}_{5/23}$$

$$= \frac{1}{23}(18t + 10t^2)$$

$$\|18t + 10t^2\|^2 = (-8)^2 + (28)^2 + (76)^2 = \dots$$

$$v_2 = \frac{18t + 10t^2}{\dots}$$

$\boxed{9.3.2}$ Trovare base ortog. di $\left(\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}3\\1\\-5\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\4\\3\\-1\end{pmatrix}\right)\right)^{\perp}$.

Prima trovo base e poi ortogonalizzo.
Servono due vettori ortogonali ai due dati.

$\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix}$

Se li cerco con una coord. nulla

$\begin{pmatrix}\cdot\\\cdot\\0\\\cdot\end{pmatrix}$ posso usare $\wedge$: $\begin{pmatrix}-9\\-1\\0\\14\end{pmatrix}$

$-27 - 1 + 28$
$18 - 4 - 14$

$$\begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Base cercata: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix} + \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 32 \\ 3 \\ 5 \\ -37 \end{pmatrix}$

$\boxed{9.3.3}$ Trovare base ortonormale risp. a $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ di $\left(\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)\right)^\perp$ in $\mathbb{R}^n$.

(d) $n = 3$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

simm ok; def pos. ...

Cerchiamo due vett. ortog. a v_1 rispetto a $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ e poi ortogonalizziamo.

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_A = 0 \iff (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{w_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\|w_1\| = {}^t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \underline{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cancel{0} \\ 1 & 2 & \cancel{1} \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \underline{0} \end{pmatrix} = 1 \cdot 1^2 + 2 \cdot (1) \cdot (-1) + 2 \cdot (-1)^2 = 1$$

$$z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \left((0 \ 2 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\underbrace{3 \times 1 \qquad 3 \times 3 \qquad 1 \times 3}_{1 \times 1}}_{\in \mathbb{R}}$$