Geometria 27/3/2013

$f : V \to V$ lineare: cercare $\mathcal{B}$ t.c. $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ sia facile (ad es. diagonale).

<u>Prop</u>: se $\mathcal{B}_0$ è una base qualsiasi e $A_0 = [f]_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_0}$ allora le altre matrici possibili di f sono tutte e sole quelle del tipo $\underbrace{A = M^{-1} \cdot A_0 \cdot M \,,\ M \text{ invert.}}$

dette: le matrici <u>coniugate</u> di A_0 (alcuni dicono: simili)

Dunque il problema è:
dato $A_0 \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$
cercare $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\det(M) \neq 0$
t.c. $M^{-1} \cdot A_0 \cdot M$ sia "facile".

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

Tipicamente si parte da $A_0 \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ che rappresenta $A_0 : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$.

<u>Dimo</u> (Prop): A altra matrice di f
$\iff \exists \mathcal{B}$ base t.c. $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$
$\iff \exists M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\det(M) \neq 0$ t.c. $\mathcal{B} = M \cdot \mathcal{B}_0$
e $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$

$A = M^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_0} \cdot M$

$\Longleftrightarrow \exists M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\det(M) \neq 0$ t.c.

$$A = M^{-1} \cdot A_0 \cdot M.$$ $\blacksquare$

Def: diciamo che f è <u>diagonalizzabile</u> se esiste $\mathcal{B}$ t.c. $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ è diagonale.

Oss: f diagonalizzabile $\Longleftrightarrow \exists \mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base t.c.

$$f(v_j) = \lambda_j \cdot v_j \qquad j = 1, \dots, n.$$

Def: diciamo $\lambda \in \mathbb{K}$ <u>autovalore</u> di f se esiste $v \in V$, $v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda \cdot v$. Ogni tale v è detto <u>autovettore</u> di f relativo a λ.

Oss: Se non chiedessi $v \neq 0$ ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ sarebbe autovalore:

$$f(0) = \lambda \cdot 0 \qquad \text{sempre vero: } f(0) = 0.$$

Q: come trovare autovalori di f (oppure di A).

Prop: data $f : V \to V$ si possono definire in modo non ambiguo:

- $\det(f)$ come $\det([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})$, $\mathcal{B}$ base
- $tr(f)$ come $tr([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})$, $\mathcal{B}$ base.

Dim: devo provare che $\det([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})$ non dipende da $\mathcal{B}$;

se uso $\mathcal{B}'$ altra base, ho $\mathcal{B}' = M \cdot \mathcal{B}$ e

$$[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = M^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M$$

$$\Rightarrow \det\left([f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} \right) = \cancel{\det(M^{-1})} \cdot \det\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \right) \cdot \cancel{\det(M)}$$

OK

Lem: $X \in \mathcal{M}_{m \times k}$ $\quad Y \in \mathcal{M}_{k \times m} \Rightarrow tr(X \cdot Y) = tr(Y \cdot X)$.

Dim: $$tr(\underbrace{Y \cdot X}_{\substack{k\times m \ \ m\times k \\ k\times k}}) = \sum_{i=1}^{k} (Y \cdot X)_{ii} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} (Y)_{ij} \cdot (X)_{ji}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\sum_{i=1}^{k} (X)_{ji} \cdot (Y)_{ij}} = \sum_{j=1}^{m} (X \cdot Y)_{jj}$$

$$= tr(\underbrace{X \cdot Y}_{\substack{m\times k \ \ k\times m \\ m\times m}}). \qquad \blacksquare$$

devo vedere $tr([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})$ non dipende da $\mathcal{B}$:

$$tr([f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}) = tr(\underbrace{M^{-1}}_{X} \cdot \underbrace{[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M}_{Y})$$

$$= tr([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot \cancel{M} \cdot \cancel{M^{-1}}) = tr([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}).$$

Teo: Dato V sp. vett. su K di dim n, $f: V \to V$ lin,

posto $p_f(t) = \det(t \cdot id_V - f)$ si ha che

$p_f(t) \in \mathbb{K}[t]$ è un polinomio monico di grado n

il monomio di grado max è $t^n = 1 \cdot t^n$

con coeff di t^{n-1} dato da $-tr(f)$

e termine noto $(-1)^n \cdot \det(f)$. Inoltre

$$\lambda \text{ autovalore di } f \Longleftrightarrow \lambda \text{ è radice di } p_f(t).$$

Tale $p_f(t)$ è detto polinomio caratteristico di f.

Riassunto:

- def: λ autoval di f se $\exists v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda v$
- def: $p_f(t) = \det(t \cdot id_V - f)$
- Teo: λ autoval $\Longleftrightarrow$ radice di $p_f(t)$.

non è la def. di autoval.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ vista come $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Cerco autoval: calcolo pol. caratteristico e cerco radici.

$$p_A(t) = \det(t \cdot I_2 - A) = \det\left(t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} t-5 & -8 \\ -2 & t+1 \end{pmatrix} = t^2 \underbrace{-4}_{-tr(A)} t \underbrace{-21}_{(-1)^2 \cdot \det(A)}$$

$$= (t-7)(t+3)$$

$\Rightarrow$ le radici sono $\lambda_1 = 7$ e $\lambda_2 = -3$.

Il Teo dice che essi sono gli autovalori di A, cioè
che esistono $v_1 \neq 0$ t.c. $A \cdot v_1 = 7 \cdot v_1$
$v_2 \neq 0$ t.c. $A \cdot v_2 = -3 v_2$: cerchiamoli

$v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} 5x + 8y = 7x \\ 2x - y = 7y \end{cases}$

$\begin{cases} -2x + 8y = 0 \\ \cancel{2x - 8y = 0} \end{cases}$ posso scegliere $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: $\begin{cases} 5x + 8y = -3x \\ 2x - y = -3y \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 8x + 8y = 0 \\ \cancel{2x + 2y = 0} \end{cases}$

posso scegliere $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Riassunto: $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $p_A(t) = t^2 - 4t - 21$;
radici $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -3$; sono autovalori ;
autovettori $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 7 \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Conclusione: ho una base $(v_1, v_2) = \mathcal{B}$ di autovettori,
dunque A è diagonalizzabile :

$$\mathcal{B}^{-1} \cdot A \cdot \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dimo teorema:

- $p_f(t) = \det(t \cdot id_V - f)$ è ben definito $\forall t \in \mathbb{K}$ (prima parte Prop.)

- λ autoval. $\iff \exists v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda \cdot v$

$\iff \exists v \neq 0$ t.c. $\lambda \cdot v - f(v) = 0$

$\iff \exists v \neq 0$ t.c. $\lambda \cdot id_V(v) - f(v) = 0$

$\iff \exists v \neq 0$ t.c. $(\lambda \cdot id_V - f)(v) = 0$

$\iff \operatorname{Ker}(\underbrace{\lambda \cdot id_V - f}_{V \to V}) \neq \{0\}$

$\iff \operatorname{Ker}([\lambda \cdot id_V - f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) \neq \{0\} \quad \forall \mathcal{B}$

$\iff \det([\lambda \cdot id_V - f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) = 0 \quad \forall \mathcal{B}$

$\iff \det(\lambda \cdot id_V - f) = 0$

$\iff p_f(\lambda) = 0$

$\iff \lambda$ è radice di $p_f(t)$.

- polinomio monico di grado n: scelgo $\mathcal{B}$ base, $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

$$p_f(t) = \det(t \cdot id_V - f) = \det([t \cdot id_V - f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})$$

$$= \det(t \cdot [id_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})$$

$$= \det(t \cdot I_n - A)$$

$$= \det \left(t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \cdots & & & a_{nn} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det \underbrace{\begin{pmatrix} t-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t-a_{22} & -a_{23} & & \vdots \\ -a_{31} & -a_{32} & t-a_{33} & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ -a_{n1} & \cdots & & & t-a_{nn} \end{pmatrix}}$$

t indeterminata
$a_{ij} \in \mathbb{K}$ numeri fissati

tutti i coeff. di questa sono polinomi in t
(monomi di grado 0 fuori da diago
binomi di grado 1 sulla diago)

$\Longrightarrow$ $p_f(t) \in \mathbb{K}[t]$; il termine di grado + alto viene dal prodotto dei coeff sulla diago, che è :

$$(t-a_{11})(t-a_{22})(t-a_{33}) \cdots (t-a_{nn})$$

$$= \underbrace{t^n}_{\text{monico di grado } n} - \underbrace{(a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn})}_{\substack{\mathrm{tr}(A) \\ = \mathrm{tr}(f)}} t^{n-1} + \text{grado inferiore}$$

· coeff. termine t^{n-1} è $-\mathrm{tr}(A)$ poiché :

- dal prodotto sulla diago princ. viene $-\mathrm{tr}(A) \cdot t^{n-1}$

- da tutti gli altri prodotti non viene nulla di grado $n-1$:

$$\begin{pmatrix} \deg=1 & \deg=0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \deg=0 & \cancel{\deg=1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \deg=1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \deg=1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cancel{\deg=1} \end{pmatrix}$$

se un prodotto coinvolge il termine su riga i e colonna j allora non coinvolge quelli di posto (i,i) e (j,j)

$\Rightarrow$ al massimo contiene $n-2$ fattori di grado 1

$\Rightarrow$ grado $\leq n-2$.

- termine noto $= (-1)^n \cdot \det(f)$

Infatti: termine noto $= p_f(0) = \det(0 \cdot Id_V - f)$

$$= \det(-f) = \det([-f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})$$

$$= \det(-[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) = (-1)^n \cdot \det([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})$$

$$= (-1)^n \cdot \det(f). \quad ▨$$

<u>Es</u>: $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow p_A(t) = t^3 - 3 \cdot t^2 + ? \, t + \underbrace{(-1)^3}_{-1} \cdot \underbrace{\det(A)}$

$-24 - 4^2 - 5$
$-4 + 45 - 28 = \ldots$

Es: $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile?

$p_A(t) = \det(t \cdot I_2 - A) = \det \begin{pmatrix} t-7 & -3 \\ 0 & t-7 \end{pmatrix}$

$= (t-7)^2$ unica radice 7.

Per il Teo, A ha solo l'autoval. 7 dunque se fosse diag. la sua forma diagonale sarebbe $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$: esisterebbe $M \in M_{2\times2}$, $\det(M) \neq 0$ t.c.

$$M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = 7 \cdot I_2$$

$\Rightarrow A = M \cdot 7 \cdot I_2 \cdot M^{-1} = 7 \cdot M \cdot I_2 \cdot M^{-1} = 7 \cdot M \cdot M^{-1} = 7 \cdot I_2$.

NO

Visto in realtà: se $f: V \to V$ ha un solo autovalore λ (cioè $p_f(t) = (t-\lambda)^n$) allora è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ è $\lambda \cdot id_V$

(per matrici : è già diagonale) —

Esercizi

$\boxed{9.4.2}$ Trovare le $X \in \mathfrak{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ autoaggiunte risp. a $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ t. ...

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad tr(X) = 0 \quad {}^tX = X.$

X autoaggiunta rispetto a $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$

$$\Longleftrightarrow \langle X\cdot v | w\rangle_A = \langle v | X\cdot w\rangle_A \quad \forall v,w \in \mathbb{R}^n$$

$$\Longleftrightarrow {}^tw\cdot A\cdot(X\cdot v) = {}^t(X\cdot w)\cdot A\cdot v \quad \forall v,w \in \mathbb{R}^n$$

$$\Longleftrightarrow {}^tw\cdot\underline{(A\cdot X)}\cdot v = {}^tw\cdot\underline{({}^tX\cdot A)}\cdot v \quad \forall v,w \in \mathbb{R}^n$$

$$\Longleftrightarrow A\cdot X = {}^tX\cdot A$$

Ora: $X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cancel{2x+y = 2x+y} \\ 2y-x = x+y \\ \cancel{x+y = 2y-x} \\ \cancel{y-x = y-x} \end{cases} \qquad y = 2x$$

$$\Longrightarrow x\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(d) $n=3$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad {}^tX + X = 0.$

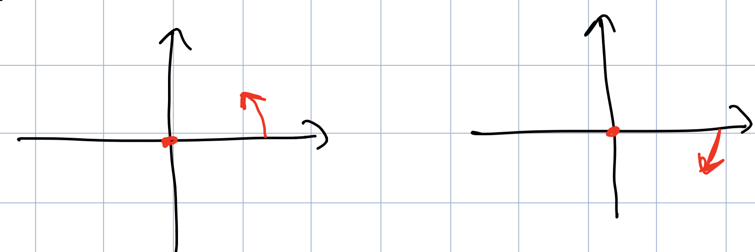
$$X = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -x & -y \\ x & 0 & -z \\ y & z & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

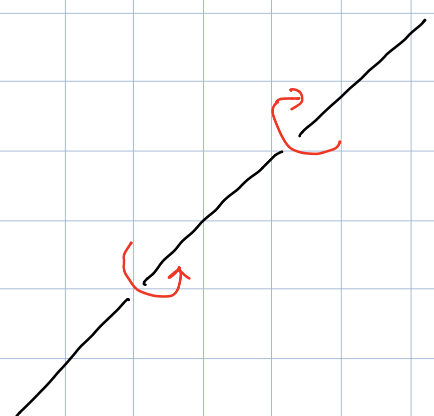
Sistema 9×3 che si semplifica molto ...

$\boxed{9.4.3(b)}$ Trovare la matrice di una rotazione in $\mathbb{R}^3$ di angolo $\pi/6$ intorno alla retta generata da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

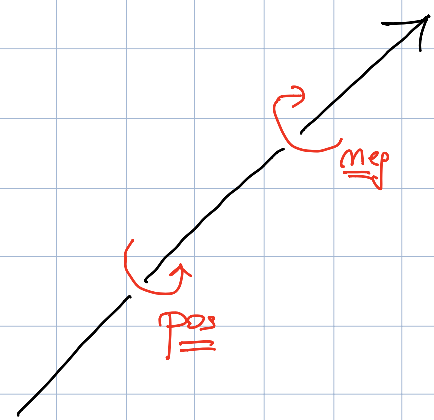
<u>Oss</u>: in $\mathbb{R}^2$ ha senso dire rotaz $+\pi/6$ o $-\pi/6$ intorno a O:



In $\mathbb{R}^3$ intorno a retta il segno non ha senso

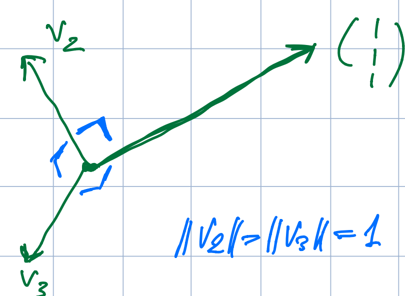


Può se la retta ha verso assegnato ha senso:



rotaz. di angolo $\pi/6$ intorno a $\mathrm{Span}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

I modo:



$\|v_2\| = \|v_3\| = 1$

$$v_2 \longmapsto \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot v_2 \pm \frac{1}{2} v_3 \qquad \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & \mp 1/2 \\ \pm 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$v_3 \longmapsto \mp \frac{1}{2} v_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} v_3$$

anzi: se $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ho:

$$A \cdot (v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2, v_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & \mp 1/2 \\ 0 & \pm 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

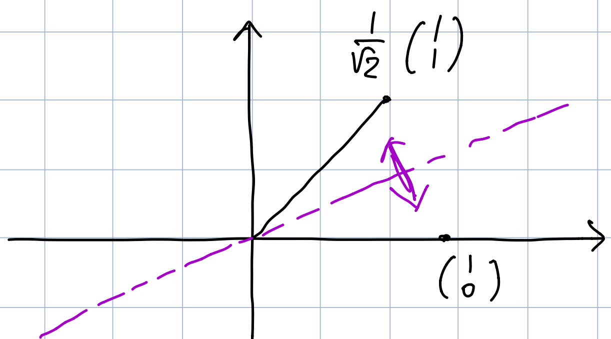
servono v_2, v_3 base ortonormale di $v_1^{\perp}$.

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \wedge \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

Per casa: calcolare $A = (v_1\, v_2\, v_3)\cdot\begin{pmatrix}\cdots\\\cdots\\\cdots\end{pmatrix}(v_1\, v_2\, v_3)^{-1}$.

II modo: rotaz. intorno a e_1 è: $g = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{3}/2 & \mp 1/2\\ 0 & \pm 1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix}$.

Per trovare la rotaz. di $\pi/6$ intorno a $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$
posso: trovare isometria f che manda v_1 in e_1;
soluzione è $f^{-1}\circ g \circ f$.



$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

manda $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

$$f = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}\cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}}$$

$f^{-1} =$