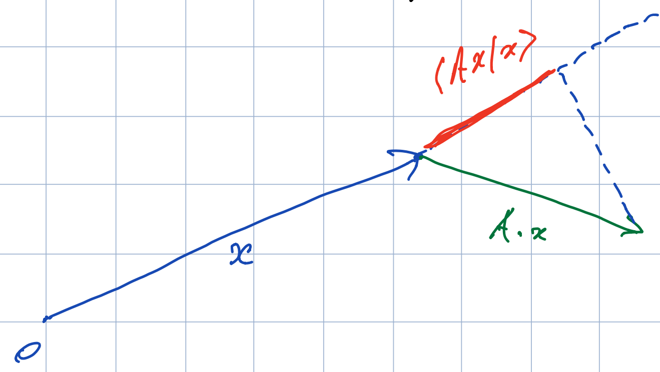
Geometria 3/4/19

$$\max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\langle Ax | x \rangle}{\|x\|^2}$$ è autoval. di A per A simm.

$\|x\| = 1$



$\langle Ax|x \rangle$ è la componente di Ax lungo x

$\leadsto$ ragionevole che sia max quando Ax è multiplo di x

(vero solo perché A è simm).

Teo: $A \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ simmetrica, $d_j = \det$ (sottomatr. $j \times j$ in alto a sx).

Se $d_1, \dots, d_{m-1} \neq 0$ allora

$$\operatorname{sgn}\{\text{autoval. } A\} = \operatorname{sgn}\left\{ \frac{d_i}{d_{i-1}} : i = 1 \dots m \right\} \quad (d_0 = 1).$$

So che A è diagonalizzabile; se fosse già diagonale; ad es

$$\begin{pmatrix} +7 & & & & & & 0 \\ & -3 & & & & & \\ & & -4 & & & & \\ & & & -5 & & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 1 & \\ 0 & & & & & & 7 \end{pmatrix}$$

4 autoval +

3 autoval −

$(d_0)\, d_1 \dots d_7$ $\quad d_6$

$(+)\; + \; - \; + \; - \; - \; - \; -$

3 cambi segno

Dim: uso questo fatto: se $B \in M_{k \times k}(\mathbb{R})$ simm

con p autoval pos (con molt) e m autoval neg (con molt)

allora esistono sottospazi

di dim p

$$P^{(p)} \subset \mathbb{R}^k \quad t.c. \quad \underbrace{\langle x | x \rangle_B > 0 \quad \forall x \in P \setminus \{0\}}_{B \text{ è def. pos. su } P}$$

$$N^{(m)} \subset \mathbb{R}^k \quad t.c. \quad \underbrace{\langle x | x \rangle_B < 0 \quad \forall x \in N \setminus \{0\}}_{B \text{ è def. neg. su } N}$$

$$\tilde{P}^{(k-m)} \subset \mathbb{R}^k \quad t.c. \quad \underbrace{\langle x | x \rangle_B \geq 0 \quad \forall x \in \tilde{P}}_{B \text{ è semi def. pos su } \tilde{P}}$$

$$\tilde{N}^{(k-p)} \subset \mathbb{R}^k \quad t.c. \quad \underbrace{\langle x | x \rangle_B \leq 0 \quad \forall x \in \tilde{N}}_{B \text{ è semi def. neg. su } \tilde{N}}.$$

Basta prendere:

P =	somma	autospaz.	con	autoval	> 0	(p)
N =	"	"	"	"	< 0	(m)
$\tilde{P}$	"	"	"	"	≥ 0	$(k-m)$
$\tilde{N}$	"	"	"	"	≤ 0	$(k-p)$

$$k\left\{\begin{pmatrix} \boxed{A_k} & \\ & \end{pmatrix}\right\}k$$

Dimostro per induz. finita su k che

$$\operatorname{sgn}\{\text{autoval } A_k\} = \operatorname{sgn}\left\{\frac{d_j}{d_{j-1}} : j = 1 \dots k\right\}$$

$\underline{\underline{k = m : \text{tesi}}}$

$k = 1$: $\quad A_1 = (d_1) \qquad \underline{\underline{\text{ok}}}$

Passo induttivo. Supponiamo A_k abbia p autoval pos
m autoval neg:

	casi possibili	devo verificare
n pari $\Rightarrow d_k > 0$	$d_{k+1} > 0$	$p+1$ pos, n neg per $A_k^{(1)}$
	$d_{k+1} < 0$	p pos, $n+1$ neg per $A_k^{(2)}$
	$d_{k+1} = 0^*$	p pos, n neg per $A_k^{(3)}$
n dispari $\Rightarrow d_k < 0$	$d_{k+1} > 0$	p pos $n+1$ neg per $A_k^{(4)}$
	$d_{k+1} < 0$	$p+1$ pos, n neg per $A_k^{(5)}$
	$d_{k+1} = 0^*$	p pos, n neg per $A_k^{(6)}$

* solo se $k+1=n$

Oss: non è vero che un autovet. di A_k lo è anche di A_{k+1}; si mantengono però i segni e quello nuovo è il segno di d_{k+1}/d_k.

(1) Abbiamo A_k p pos, n neg., n pari

d_{k+1} positivo $\Rightarrow$ A_{k+1} ha un numero pari di autoval. negativi.

Se ne ha n: è quello che devo verificare; se no

$\geq n+2$ neg.

A_k: $\exists\, P^{(p)} \subset \mathbb{R}^k$ su cui A_k è def. pos

A_{k+1}: $\exists\, N'^{(n+2)} \subset \mathbb{R}^{k+1}$ su cui A_{k+1} è def neg.

però $p+(n+2) = (p+n)+2 = k+2 > k+1$

$\Rightarrow P \cap N' \neq \{0\} \Rightarrow \exists\, x \neq 0$ in $P \cap N'$

$x \in P \Rightarrow \langle x|x\rangle_{A_k} = \langle x|x\rangle_{A_{k+1}} > 0$

$x \in N' \Rightarrow \langle x|x\rangle_{A_{k+1}} < 0$

assurdo

$\leq n-2$ neg

$\Downarrow$?

allora ne ha $\geq k+1-(n-2) = k-n+3$ positivi

A_k : $\exists N^{(m)} \subset \mathbb{R}^k$ su cui A_k è def. neg.

A_{k+1} : $\exists P'^{(k-m+3)} \subset \mathbb{R}^{k+1}$ su cui A_{k+1} è def. pos.

però $m+(k-m+3) = k+3 > k+1$

$\Longrightarrow N \cap P' \neq \{0\}$ assurdo

(2) (4) (5) identici al caso (1).

(3)+(6) : $d_{m-1} \neq 0 \Longrightarrow$ ho $m-1$ autoval. $\neq 0$

$d_m = 0 \Longrightarrow$ ho un autoval 0

Per vedere che quelli non nulli sono p pos e n neg uso $\tilde{P}'$ e $\tilde{N}'$ per A_{k+1} e P e N per A_k. $\boxed{//}$

$n=1$

$(a,b) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

x_0 pto di min. loc $\Longrightarrow f'(x_0)=0,\ f''(x_0) \geq 0$

$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0 \Longrightarrow x_0$ pto di min. loc.

n qualsiasi

Teorema: $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$;

- x_0 pto di min. loc. per $f \Longrightarrow \mathrm{grad}_{x_0}(f) = 0$
  segni autoval $H_{x_0}(f)$ sono ≥ 0
- $\mathrm{grad}_{x_0}(f) = 0$, segni autoval $H_{x_0}(f)$ sono > 0
  $\Longrightarrow x_0$ è pto di min loc.

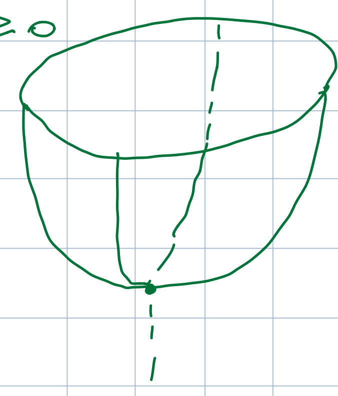
Dimo: grazie al teo. spettrale a meno di cambio di coord. isometrico ho

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\cdot h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\cdot h_n$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\lambda_1 h_1^2 + \dots + \lambda_n h_n^2 \right) + o(\|h\|^2)$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ autoval. di $H_{x_0}(f)$.

min loc $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = 0$, $\lambda_j \geq 0$

$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = 0$, $\lambda_j > 0$ $\Rightarrow$



$\Rightarrow$ min. loc. $\boxed{}$

Caso complesso. (Reale: A simm $\Leftrightarrow$ diag. via ortog.)

Analogo su $\mathbb{C}$ di U reale ortogonale è:

U unitaria: $U \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ t.c. $U^* = U^{-1}$

ovvero: colonne base ortonormale

ovvero: preserva $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathbb{C}^n}$.

Def: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ è normale se $A^* A = A \cdot A^*$.

Oss: sono normali ad es:

- A hermitiana $A^* = A$ (in part. simm. reale)

- A antihermitiana $A^* = -A$ (in part. antisimm. reale)
- A unitaria $A^* = A^{-1}$ (in particolare ortog. reale)

e altre.

Teo: A normale $\Longleftrightarrow$ diagonalizzabile tramite unitaria

ovvero: $\exists U$ t.c. $U^* = U^{-1}$, $U^{-1} A U = D$

ovvero: esiste base ortonormale di $\mathbb{C}^n$ fatta di autovettori di A.

Dim: ($\Longleftarrow$) $U^{-1} \cdot A \cdot U = D \Rightarrow A = U \cdot D \cdot U^{-1} = U \cdot D \cdot U^*$;

$$A \cdot A^* = U D \underbrace{U^* U}{} D^* U^* = U D D^* U^* = U D \bar{D} U^*$$
$$A^* \cdot A = U D^* \underbrace{U^* U}{} D U^* = U D^* D U^* = U \bar{D} D U^*$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow D\bar{D} = \bar{D} D = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix}$$

($\Longrightarrow$) Per induzione su n. Passo base ok. Passo ind.: prendo A $n \times n$ normale; scelgo $\lambda \in \mathbb{C}$ autoval di A, u autovettore unitario, completo a una base U ortonormale di $\mathbb{C}^n$. Dunque ho:

$$U^* A \cdot U = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & {}^t w \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} B \in M_{(n-1)\times(n-1)} \\ w \in \mathbb{C}^{n-1} \end{array}$$

$$\Rightarrow A = U \cdot \begin{pmatrix} \lambda & {}^t w \\ 0 & B \end{pmatrix} \cdot U^*$$

$$\Rightarrow A^* = U \cdot \begin{pmatrix} \bar\lambda & 0 \\ \bar w & B^* \end{pmatrix} \cdot U^*.$$

So che $A \cdot A^* = A^* \cdot A$:

$$A \cdot A^* = U \begin{pmatrix} \lambda & {}^t w \\ 0 & B \end{pmatrix} \underbrace{U^* U}_{I_n} \begin{pmatrix} \bar\lambda & 0 \\ \bar w & B^* \end{pmatrix} U^* = U \cdot \begin{pmatrix} |\lambda|^2 + \|w\|^2 & \cdots \\ \cdots & BB^* \end{pmatrix} U^*$$

$$A^* A = U \begin{pmatrix} \bar\lambda & 0 \\ \bar w & B^* \end{pmatrix} \underbrace{U^* U}_{I_n} \begin{pmatrix} \lambda & {}^t w \\ 0 & B \end{pmatrix} U^* = U \cdot \begin{pmatrix} |\lambda|^2 & \cdots \\ \cdots & \bar w \cdot {}^t w + B^* B \end{pmatrix} U^*$$

$$\Rightarrow |\lambda|^2 + \|w\|^2 = |\lambda|^2, \quad BB^* = \bar w \cdot {}^t w + B^* B$$

$$\Rightarrow w = 0, \; BB^* = B^* B$$

$$\Rightarrow \underset{n \times n}{U^* A U} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \underset{(n-1)\times(n-1)}{B} \text{ normale}$$

.... $\blacksquare$

Teorema spettrale complesso:

Ripeto A normale $\Leftrightarrow$ A diag.o via unitaria.
$(A^* A = A \cdot A^*)$

Prop: (1) A hermitiana $\Leftrightarrow$ A normale e ha autoval. reali

(2) A anti-hermitiana $\Leftrightarrow$ A normale e ha autoval. imm. puri

(3) A unitaria $\Leftrightarrow$ A normale e ha autoval. di modulo 1.

Dim: $\Leftarrow$ tutte facili.

($\Leftarrow_1$) $\exists U$ unitaria t.c. $U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} U^* \Rightarrow A^* = U \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\text{non } \bar\lambda_j \text{ perché } \lambda_j \in \mathbb{R}} \cdot U^*$$

$$\Rightarrow A^* = A.$$

($\Leftarrow_2$) $U^*AU = \begin{pmatrix} i\alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\alpha_n \end{pmatrix}$ $\qquad \alpha_j \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow A = U \begin{pmatrix} i\alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\alpha_n \end{pmatrix} U^*$$

$$\Rightarrow A^* = U \begin{pmatrix} -i\alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -i\alpha_n \end{pmatrix} U^* = -A$$

($\Leftarrow_3$) $U^*AU = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\alpha_n} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A = U \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\alpha_n} \end{pmatrix} U^*$$

unitarie

($\Rightarrow_1$) Supponiamo A hermitiana, $A^* = A$.

Fatto: $\langle Mz | w \rangle_{\mathbb{C}^n} = {}^t\bar{w} \cdot (M \cdot z) = (w^* \cdot M) \cdot z$

$= (M^* w)^* \cdot z = \langle z | M^* w \rangle_{\mathbb{C}^n}$

Prendo $\lambda \in \mathbb{C}$ autoval. di A, $z \in \mathbb{C}^n$ relativo autovettore.

$$\langle Az | z \rangle = \langle z | A^* z \rangle = \langle z | Az \rangle = \langle z | \lambda z \rangle = \bar{\lambda} \cdot \langle z | z \rangle = \bar{\lambda} \cdot \|z\|^2$$

$$\| $$

$$\langle \lambda z | z \rangle = \lambda \cdot \langle z | z \rangle = \lambda \cdot \|z\|^2$$

$\Longrightarrow \lambda = \bar{\lambda}$

$\overset{2}{\Longrightarrow}$ A antihermitiana, λ autoval, z autovett.

$$\langle Az | z \rangle = \langle z | A^* z \rangle = \langle z | -Az \rangle = \langle z | -\lambda z \rangle = -\bar{\lambda} \cdot \|z\|^2$$

$$\|$$

$$\langle \lambda z | z \rangle$$

$$\|$$

$$\lambda \cdot \|z\|^2$$

$\Longrightarrow \bar{\lambda} = -\lambda$

$\overset{3}{\Longrightarrow}$ A unitaria, λ autoval, z autovett.

$$\|Az\| = \|\lambda z\| = |\lambda| \cdot \|z\|$$

$$\|$$

$$\|z\|$$

$|\lambda| = 1.$ $\blacksquare$

Uso della forma complessa del teorema spettrale per descrivere forme canoniche reali di matrici non diagonalizzabili su $\mathbb{R}$.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$

$p_A(t) = \det(tI_2 - A) = \det\begin{pmatrix} t & \alpha \\ -\alpha & t \end{pmatrix} = t^2 + \alpha^2$

ha radici complesse non reali $\pm i\alpha$

$\Rightarrow$ non diago su $\mathbb{R}$.

In generale: visto sopra che le antisimmetriche hanno autoval. imm puri (non reali quelli non nulli) $\Rightarrow$ l'unica antisimm. diago su $\mathbb{R}$ è O.

Prop: Se A è antisimm. reale esiste una base ortonormale U di $\mathbb{R}^n$ (cioè matrice ortogonale) t.c.

$$ {}^tU \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \\ 0 & \boxed{B_2} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} $$

dove ogni B_j è o $(0) \in M_{1\times 1}(\mathbb{R})$

oppure $B_j = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_j \\ \alpha_j & 0 \end{pmatrix}$.

Oss: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow p_A(t) \in \mathbb{R}[t]$

$\Rightarrow$ Se $p_A(t)$ ha una radice z non reale allora ha anche la radice $\bar{z}$:

$$P_A(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \dots + a_n \qquad \underline{a_j \in \mathbb{R}}$$

So che $z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n = 0$

coniugo: $\bar{z}^n + a_1 \bar{z}^{n-1} + a_2 \bar{z}^{n-2} + \dots + a_0 = 0$

$\Rightarrow P_A(\bar{z}) = 0$.

<u>Idea dim. Prop:</u> gli autoval di A sono con molt.

$$\underbrace{0, \dots, 0}, \underbrace{i\alpha_1, -i\alpha_1}, i\alpha_2, -i\alpha_2, \dots$$

ognuno fornisce un blocco $(0) \in M_{1\times1}$:

basta notare che un autoval. reale di matrice reale ha relativo autovettore reale.

ognuno fornisce un blocco 2×2 $\begin{pmatrix} 0 & -\alpha_j \\ +\alpha_j & 0 \end{pmatrix}$

cioè $\exists$ base ortonormale che dà tali blocchi

Provo che $i\alpha_j$ e $-i\alpha_j$ danno blocco 2×2:

se prendo $x_j + i y_j$ autovettore relativo a $i\alpha_j$ ho:

$$A \cdot (x_j + i y_j) = i\alpha_j (x_j + i y_j)$$

$$\Rightarrow A x_j + i A y_j = -\alpha_j y_j + i \alpha_j x_j$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} A x_j = -\alpha_j y_j \\ A y_j = \alpha_j x_j \end{array} \Longrightarrow [A]^{(x_j,-y_j)}_{(x_j,-y_j)} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_j \\ \alpha_j & 0 \end{pmatrix}$$

Resta da vedere che posso scegliere $(x_j, -y_j)$ ortonormale: noto che $x_j - i y_j$ è autovet di A relativo a $-i\alpha_j$

Poiché A è normale autovett. rel. a autoval. distinti sono $\perp$ tra loro:

$$0 = \langle x_j + i y_j \mid x_j - i y_j \rangle_{\mathbb{C}^n}$$

$$= \langle x_j \mid x_j \rangle_{\mathbb{C}^n} + i \langle x_j \mid y_j \rangle_{\mathbb{C}^n} + i \langle y_j \mid x_j \rangle_{\mathbb{C}^n} - \langle y_j \mid y_j \rangle_{\mathbb{C}^n}$$

$$= \left(\|x_j\|^2_{\mathbb{R}^n} - \|y_j\|^2_{\mathbb{R}^n} \right) + 2i \langle x_j \mid y_j \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \|x_j\| = \|y_j\| \\ \langle x_j \mid y_j \rangle = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ basta dividere per $\|x_j\| = \|y_j\|$ e si ha base ortonormale.