Esercitazione 05-04-19

10.1.10 Discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$ della matrice A assegnata al variare del parametro k (quando presente).

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ simmetrica. È diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ (e su $\mathbb{C}$). (Per il teorema spettrale).

$$p_A(t) = \det\begin{pmatrix} 2-t & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = t^2 - 4t + 3.$$

$$\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$$

$4 \in \mathbb{R}$

$P_A(t)$ ha 2 radici reali distinte.

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ A triangolare superiore

$\Rightarrow$ l'unico autovalore è $\lambda = 1$, e $m_a(1) = 2$.

Molteplicità geometrica $m_g(1) = \dim(\mathrm{Ker}(A - Id))$

(In generale $m_g(\lambda) \doteq \dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda Id))$ λ autovalore di A

$$= \dim\left(\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1$$

$m_g(1) = 1 \neq m_a(1) = 2$. A non è diagonalizzabile né su $\mathbb{R}$ né su $\mathbb{C}$.

(f) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad p_A(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 & 0 \\ -1 & -t & 0 \\ -1 & 0 & 2-t \end{pmatrix} =$

$= (2-t)\cdot(t^2+1)$ $\quad \lambda_1 = 2,\ \underbrace{\lambda_2 = i,\ \lambda_3 = -i}_{\text{radici di } t^2+1.}$

A non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ perché non ha tutti gli autovalori reali.

A è diag. su $\mathbb{C}$, perché ha 3 autovalori distinti.

(g) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$p_A(t) = \det\begin{pmatrix} 3-t & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 4 & 0 & 3-t \end{pmatrix} = (1-t)\cdot(t^2-6t+5)$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \underbrace{\lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 5}_{\text{radici di } t^2-6t+5.}$$

Autovalore 1, $m_a(1) = 2$

Autovalore 5, $m_a(5) = 1 = m_g(5)$

Calcoliamo $m_g(1) = \dim(\mathrm{Ker}(A - Id)) = \dim\left(\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = 2$

$m_g(1) = 2 = m_a(1)$

A è diagonalizzabile sia su $\mathbb{R}$ che su $\mathbb{C}$.

(h)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}) \text{ simmetrica}$$

Per il teorema spettrale è diagonalizzabile.

$$A \overset{\text{coniugata}}{\sim} B = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Cambio base da

$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a $\mathcal{B}' = \{e_2, e_3, e_1, e_4\}$

$p_A(t) = (t^2 - 2t - 8) \cdot (t^2 - 4t + 3)$ Autovalori $4, -2, 3, 1 \in \mathbb{R}$ distinti.

(i) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \\ -10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

$P_A(t) = t^4 + 12t^2 + 27$.

Poniamo $y = t^2$. Sostituendo otteniamo

$P_A(y) = y^2 + 12y + 27$. - calcoliamo le radici:

$y_{1,2} = \dfrac{-12 \pm 6}{2}$ $\quad y_1 = -9 \quad y_2 = -3$

Da $t^2 = y_1 = -9$ ricaviamo gli autovalori $\lambda_1 = 3i$ $\lambda_2 = -3i$

Da $t^2 = -3$ $\lambda_3 = \sqrt{3}i$, $\lambda_4 = -\sqrt{3}\cdot i$

A non e' diag su $\mathbb{R}$ (non ha tutti gli autovalori reali)

A e' diag. su $\mathbb{C}$ (4 autovalori in $\mathbb{C}$ distinti)

(b).

$$A_k = \begin{pmatrix} 2-k & 3k-2 \\ 1 & 2k-1 \end{pmatrix}$$

$$p_{A_k}(t) = \det(A_k - t\cdot Id) = t^2 - \underbrace{(1+k)}_{tr(A_k)}\cdot t + \overbrace{(2k-2k^2)}^{\det(A_k)}$$

Δ_k il discriminante di $p_{A_k}(t)$

$\Delta_k = 9k^2 - 6k + 1$. Δ_k ha una sola radice di molteplicità 2

$\bar{k} = 1/3$

Per $k \neq \bar{k} = \frac{1}{3}$, $p_{A_k}(t)$ ha due radici distinte, e quindi

per $k \neq \frac{1}{3}$ A_k è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

Per $k = \frac{1}{3}$ $p_{A_{1/3}}(t) = t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{4}{9}$. $A_{1/3}$ ha il solo autovalore

$\lambda = 2/3$ e $m_a\left(\frac{2}{3}\right) = 2$.

$$A_{1/3} = \begin{pmatrix} 5/3 & -1 \\ 1 & -1/3 \end{pmatrix} \qquad A_{1/3} - \frac{2}{3} Id = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$ - rango 1

$m_g\left(\frac{2}{3}\right) = 1 \neq m_a\left(\frac{2}{3}\right) = 2.$

Quindi per $k = \frac{1}{3}$ A_k non è diagonalizzabile (né su $\mathbb{R}$ né su $\mathbb{C}$)

◦ Se $k \in \mathbb{R}$, $A_k \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

$\Delta_k = 9k^2 - 6k + 1 = (3k-1)^2 \geq 0$. ($= 0$ solo se $k = \frac{1}{3}$)

discriminante $p_{A_k}(t)$. Quindi per $k \in \mathbb{R}$, $k \neq \frac{1}{3}$, $\Delta_k > 0$

(m).

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}$$

$$P_{A_k}(t) = -t^3 + 3t^2 + (2k-5)\cdot t - 2k+3.$$

$P_{A_k}(1) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{C} \qquad P_{A_k}(1) = -1+3-5+\cancel{2k}-\cancel{2k}+3 = 0$

$$P_{A_k}(t) = (t-1)\cdot\underbrace{\left(-t^2+2t+(2k-3)\right)}_{q_k(t)}$$

$\hookrightarrow P_{A_k}(t)$ ha due radici reali distinte

$\Downarrow$

per $k \in \mathbb{R}$, $k \neq \frac{1}{3}$

A_k è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

$\Delta_{q_k(t)} = 4 + 4(2k-3) \rightarrow$ radici di $\Delta_{q_k(t)}$ $\quad \dfrac{-2 \pm \sqrt{8(k-1)}}{-2}$

Se $k \neq 1$ $\Delta_{q_k(t)} \neq 0 \Rightarrow q_k$ ha radici distinte ... (calcolate le radici e discutete la diagonalizz.)

Per $k=1$ ... Discutere la diagonalizzabilità.