Geometria 17/4/19

Prossima lez 7/5/19 : 16:30 (C32) ~ Slavich.

Spazi proiettivi (reali)

X insieme ; chiamo relazione un sottoinsieme R di $X \times X$ e scrivo xRy se $(x,y) \in R$.

Es: X = abitanti dell'Italia

$R = \{ (x,y) : x$ è padre di $y \}$

R = "essere padre di"

(Luciano, Carlo) $\in$ "essere padre di"

$\Updownarrow$

Luciano è padre di Carlo

Una relazione R su X si dice:

- riflessiva se $xRx \quad \forall x$
- simmetrica se $xRy \Rightarrow yRx$
- antisimmetrica se xRy, $yRx \Rightarrow x = y$

- transitiva se $xRy,\ yRz \Longrightarrow xRz$
- di equivalenza se è riflessiva, simmetrica e transitiva
- di ordine se è riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Es: X = gli studenti di UniPI
R = "è iscritto allo stesso CdL".

È di equiv:

- xRx ✓
- $xRy \Longrightarrow yRx$ ✓
- $xRy,\ yRz \Longrightarrow xRz$ ✓

Oss: una relazione di equivalenza è avere una certa proprietà in comune.

Es: $X = \mathbb{R}$ $\quad R$ = "minore o uguale di" $= \leq$
è relaz. d'ordine

- $x \leq x$ ✓
- $x \leq y,\ y \leq x \Longrightarrow x = y$ ✓
- $x \leq y,\ y \leq z \Longrightarrow x \leq z$ ✓

Oss: in questo esempio dati x, y è sempre vero che $x \leq y$ oppure $y \leq x$. (ordine totale)

Es: $S = \{a,b,c,d\}$

$X = \mathcal{P}(S)$ = l'insieme dei sottoinsiemi di S

(in generale se S ha n elementi, $\mathcal{P}(S)$ ne ha 2^n)

$$X = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \dots \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \dots \{a,b,c,d\}\}$$

R = "è sottoinsieme di" = $\subseteq$

è di ordine

- xRx ✓
- $xRy,\ yRx \Rightarrow x=y$ ✓
- $xRy,\ yRz \Rightarrow xRz$ ✓

ma non è totale: $\{a,b,c\}$, $\{a,d\}$ non sono confrontabili.

Fisso per un po' X insieme, R relaz. di equiv. su X

Def: dato $x \in X$ chiamo classe di equivalenza di x

$$[x] = \{y \in X : xRy\}.$$

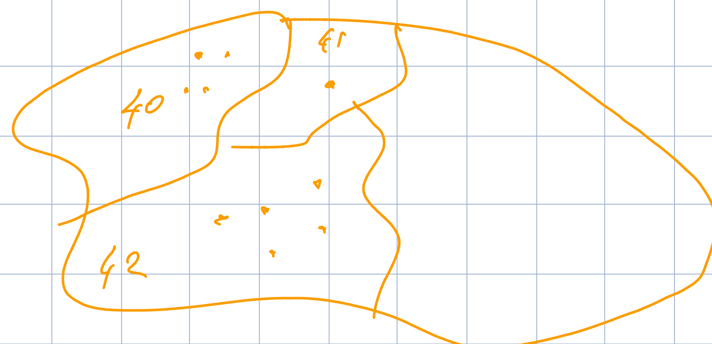
Chiamo insieme quoziente $X/_R$ l'insieme di tutte le classi di equivalenza e

$$\pi : X \to X/R$$
$$x \mapsto [x]$$

proiezione nel quoziente.

Prop: le classi di equivalenza costituiscono una partizione di X, cioè l'unione di tutte esse è X e due di esse sono uguali o disgiunte.

Es: $X =$ "noi" ; $R =$ "ha lo stesso numero di scarpe di"



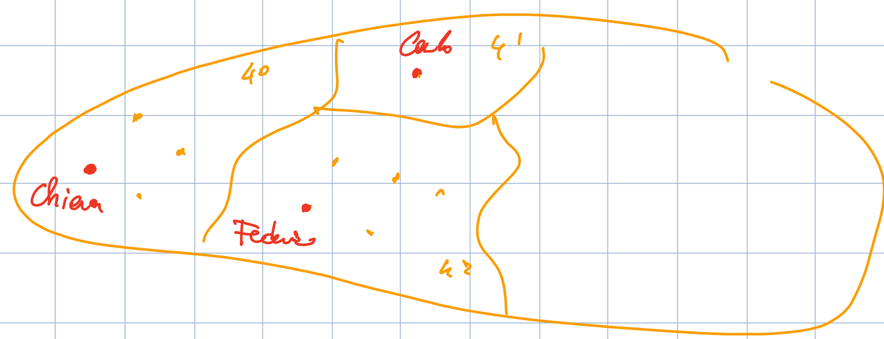
Dim (Prop): $x \in [x]$ dato che xRx dunque ogni el. di X è in qualche classe di equiv.

$[x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow \exists z$ t.c. $z \in [x]$, $z \in [y]$
$\Rightarrow xRz, yRz \Rightarrow xRz, zRy \Rightarrow xRy$.
Provo che $[x] \subset [y]$: se $w \in [x]$ ho xRw
ma $yRx \Rightarrow yRx, xRw \Rightarrow yRw \Rightarrow w \in [y]$.
Analogamente $[y] \subset [x]$. $\blacksquare$

Q: come descrivere un insieme quoziente X/R?
"X modulo R"

Def: un insieme di rappresentanti è un sottoinsieme di X che contiene esattamente un elemento per ogni classe di equiv.

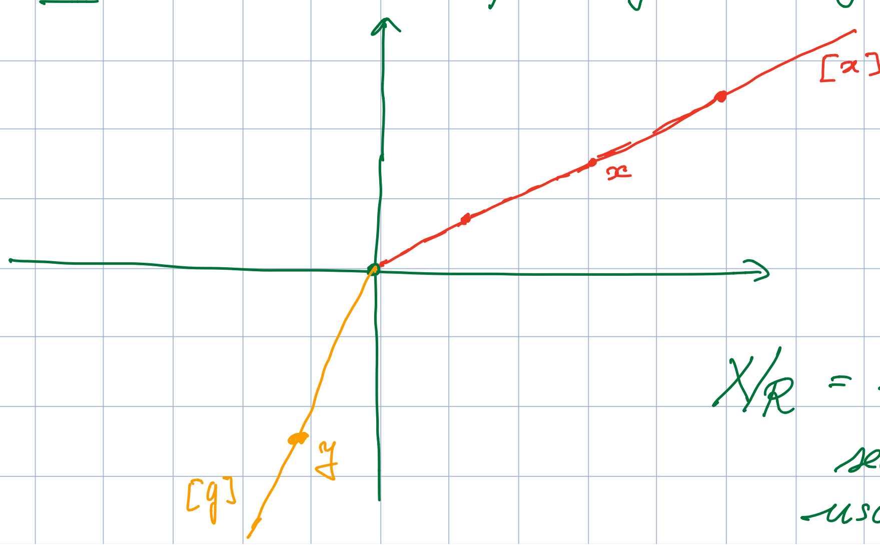
Es: X = noi R = stesso numero scarpe



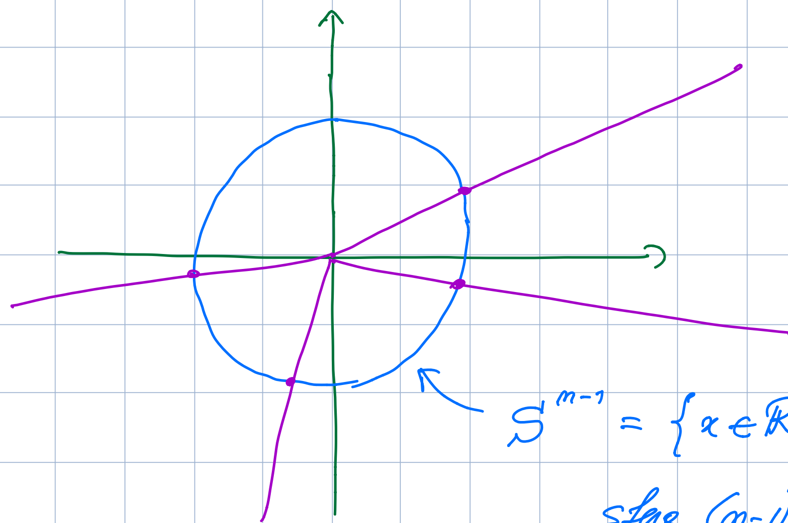
Oss: un insieme di rappresentanti è in biiezione con l'insieme quoziente $\Rightarrow$ ne dà una descrizione.

Nell'esempio la descrizione è innaturale: meglio usare nome "41", "42", ...

Es: $X = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; xRy se $y = t \cdot x$ con $t > 0$.



X/R = l'insieme delle semirette in $\mathbb{R}^2$ uscenti dall'origine.



$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$$

sfera $(n-1)$-dimensionale

S^1 = circonferenza

S^2 = sfera unitaria in $\mathbb{R}^3$

Chiamo anche $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$

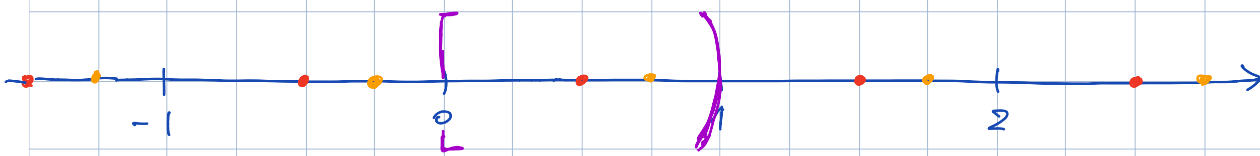
D^2 = cerchio

D^3 = palla unitaria in $\mathbb{R}^3$.

Nell'esempio S^{n-1} dà una "buona" descrizione geometrica del quoziente $\left(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right)/_{y \sim x}$ ed è un insieme di rappresentanti. se $y = t \cdot x$

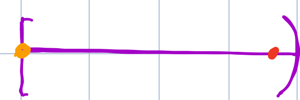
$\sim$ = "tilde" spesso usato per indicare una relazione di equivalenza.

Es: $X = \mathbb{R}$, $x \sim y$ se $y - x \in \mathbb{Z}$.



$[0,1)$ è un insieme di rappresentanti

$\Rightarrow$ è in biezione col quoziente.



rappresentanti "lontani"

classi di equiv. molto vicine

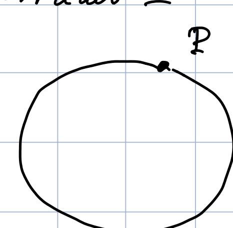
Definizione migliore: prendo $[0,1]$ = insieme sovrabbondante di rappresentanti:

interseca tutte le classi di equiv. in un solo pto tranne una in due pti poiché $[0]=[1]$.

$\Rightarrow \mathbb{R}/_{y\sim x}$ $\quad x\; y-x\in\mathbb{Z}$ $=$

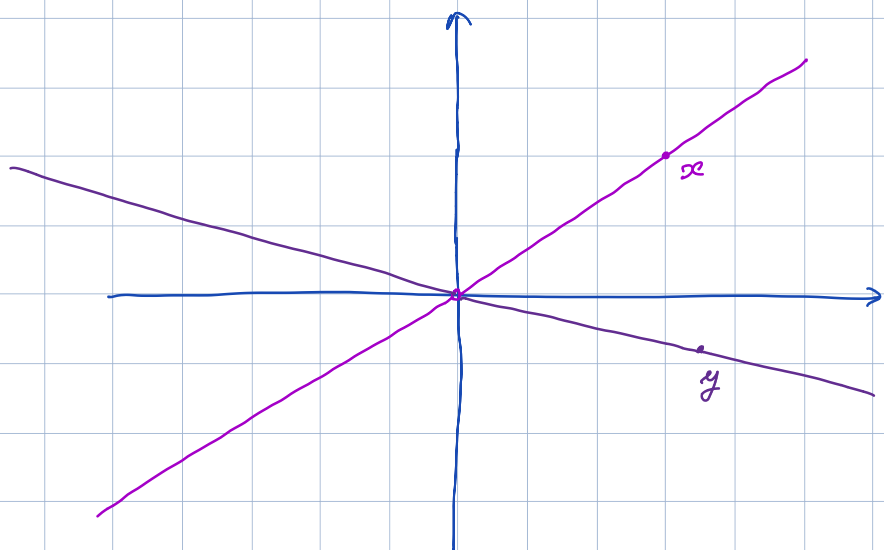
insieme ottenuto da $[0,1]$ identificando tra loro gli estremi.

$\Rightarrow$



circonferenza.

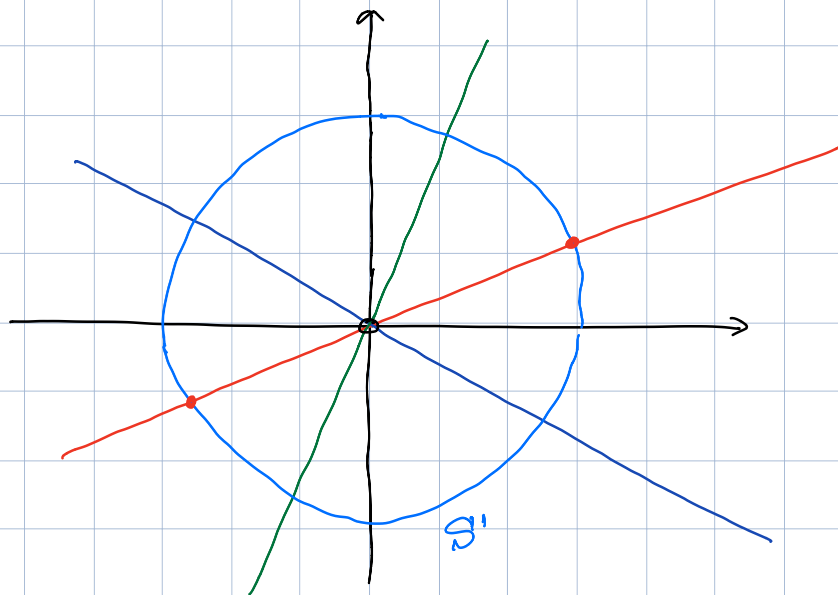
Def: se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ (quasi sempre $\mathbb{R}$ per noi) chiamo spazio proiettivo n-dimensionale il quoziente $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \left(\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}\right) / \sim$ dove $y \sim x$ se $y = t \cdot x$ con $t \in \mathbb{R}$ $(t \neq 0)$



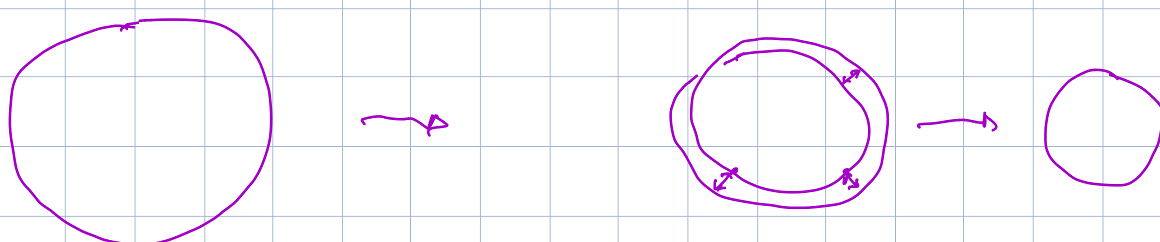
dunque $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è l'insieme delle rette per l'origine in $\mathbb{K}^{n+1}$ ("private dell'origine" oppure no).

$\mathbb{P}^0(\mathbb{R})$ = l'insieme delle rette contenute in $\mathbb{R}^{0+1} = \mathbb{R}$
= un punto

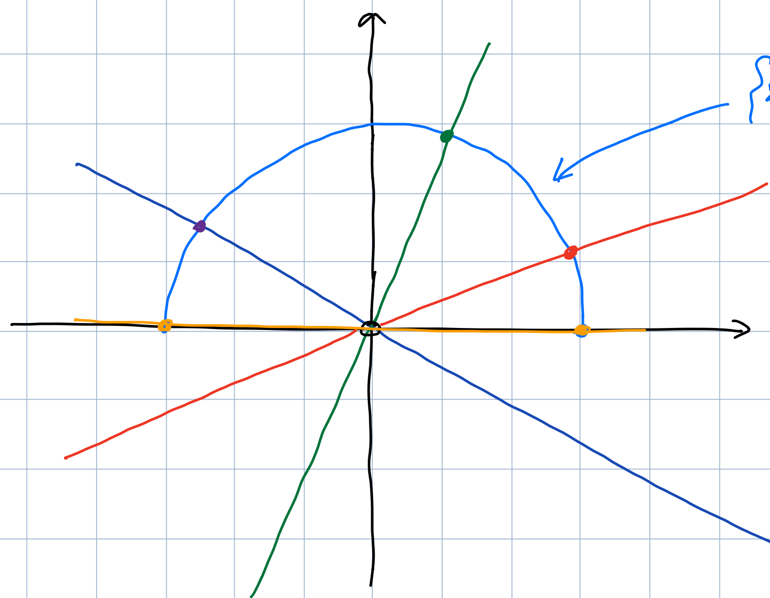
$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ = l'insieme delle rette in $\mathbb{R}^{1+1} = \mathbb{R}^2$



ogni classe di equiv incontra S^1 in due punti antipodali $\Rightarrow$ $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ si ottiene da S^1 identificando tra loro i pti antipodali.



$\Rightarrow$ $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ è una circonf.

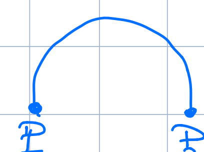


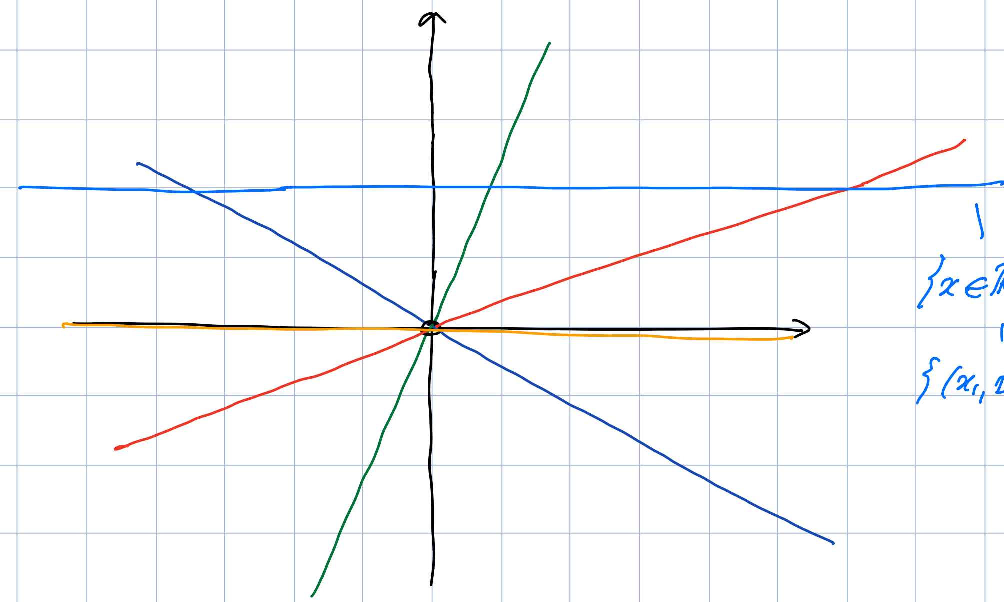
$\{x \in S^1 : x_2 \geq 0\}$

$\downarrow$

interseca ogni classe di equiv in un pto tranne una di due pti (i suoi estremi)

$\Longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ = l'insieme ottenuto da identificando gli estremi = una circonferenza.

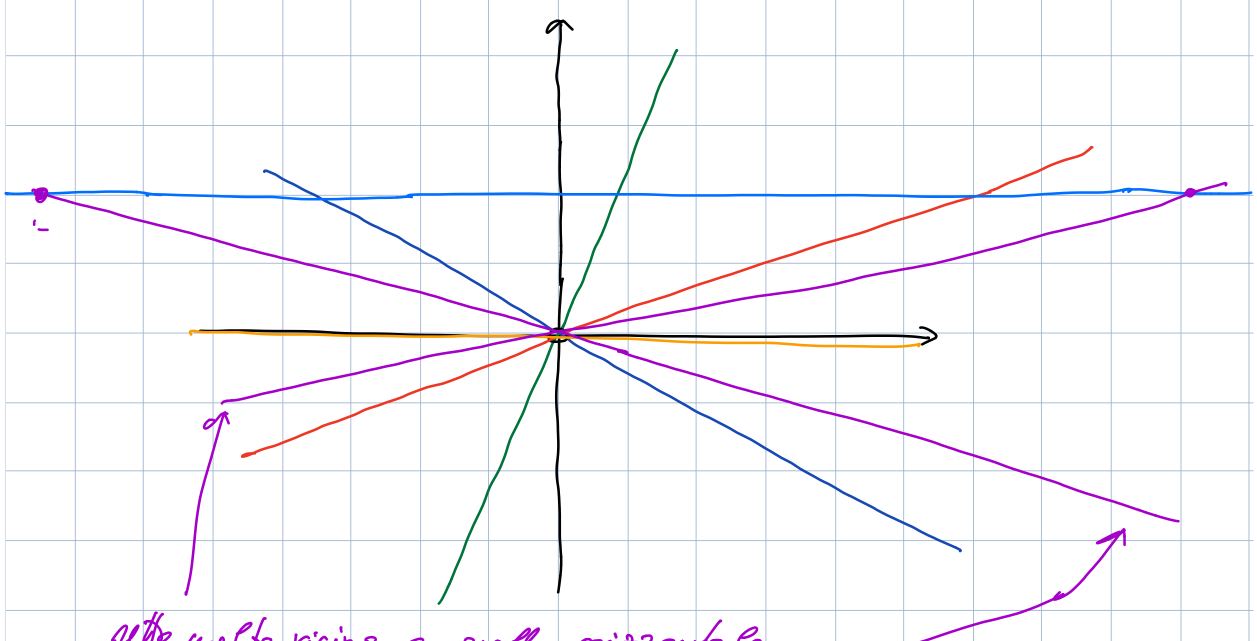




$$\{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 1\} = \{(x_1, 1) : x_1 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \{1\} = \mathbb{R}$$

Interseca ogni classe di equiv. in un solo pto tranne una che non interseca.

$\Rightarrow$ $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ si ottiene da $\mathbb{R}$ (una retta) aggiungendo un pto.



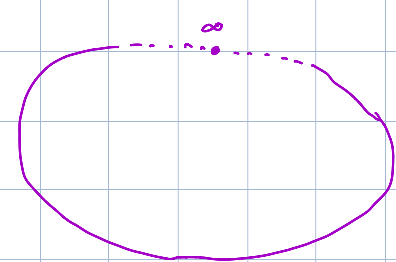
cioè un pto di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ molto vicino a quello mancante da $\mathbb{R}$

su $\mathbb{R}$ una tale retta determina un pto t con $|t| \gg 0$

$$\Rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\text{un pto}\}$$

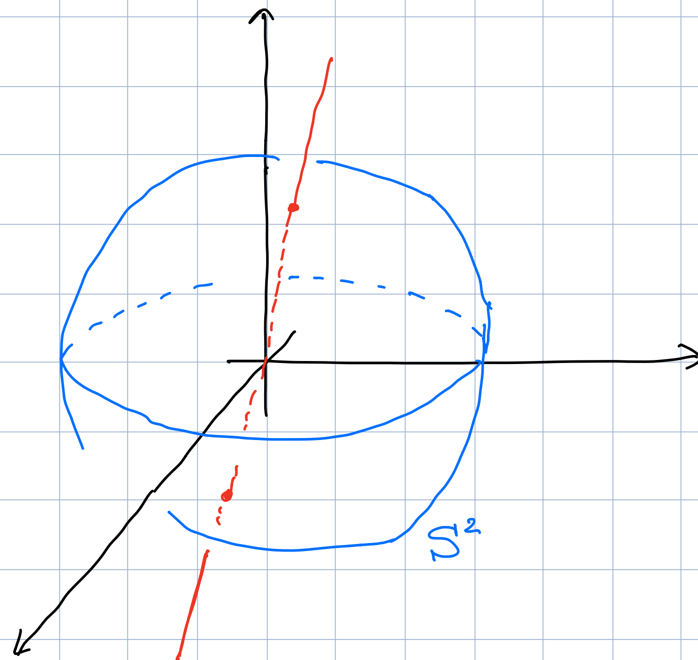
↳ vicino ai pti di $\mathbb{R}$ che sono molto grandi a sx o a dx

$$\Rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$



$\Rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ = circonferenza.

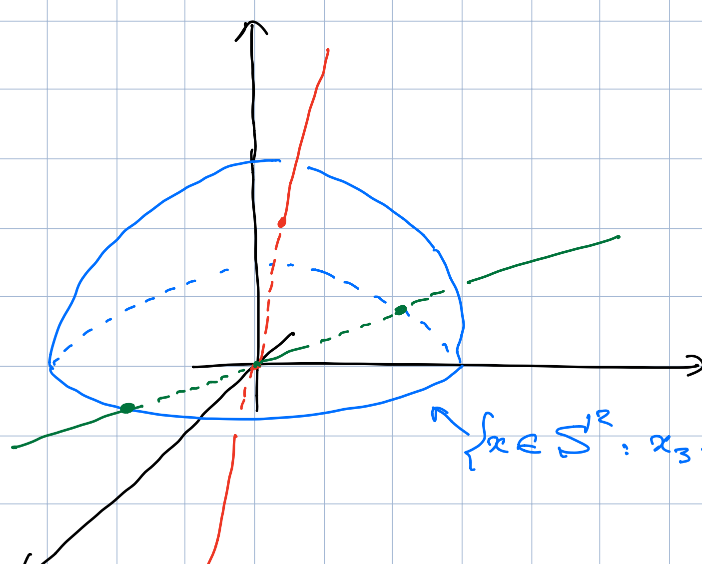
$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ = l'insieme delle rette per l'origine in $\mathbb{R}^3$



ogni retta interseca S^2 in due pti antipodali

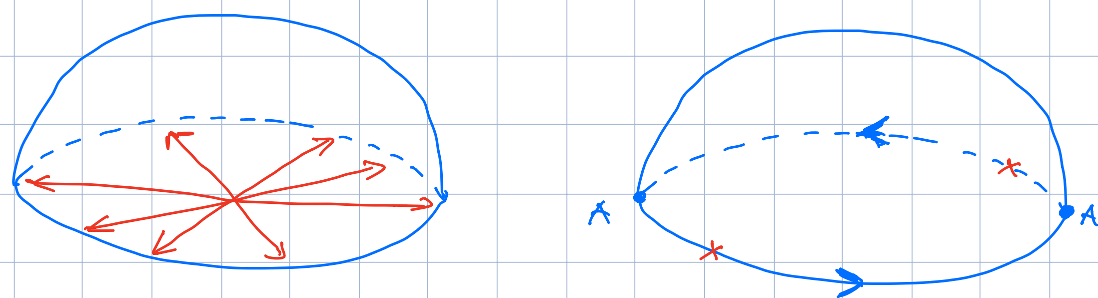
$\Longrightarrow$ $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = S^2/$ identificazione tra loro di tutte le coppie di pti antipodali.

...

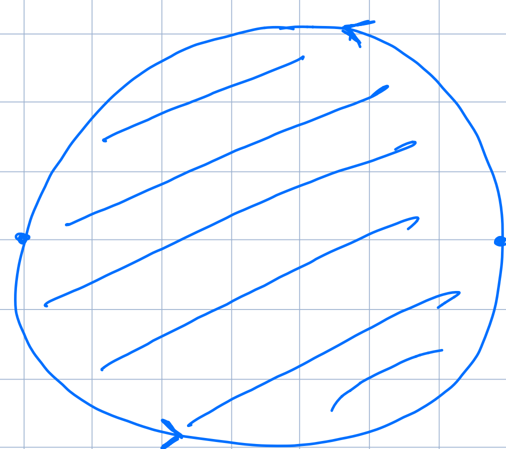


E interseca ogni classe di equivalenza in un punto tranne quelle orizzontali che interseca in due punti antipodali sull'equatore

$\Rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ = ottenuto da E identificando tutti i punti antipodali sull'equatore

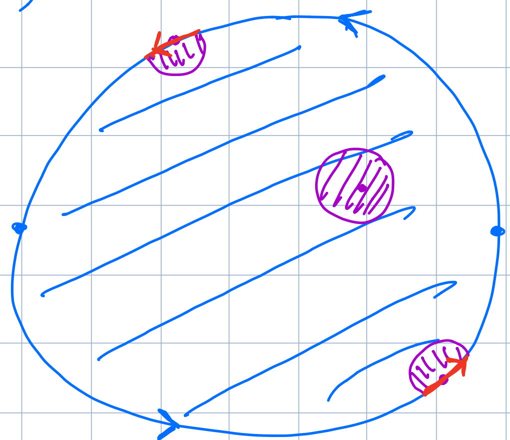


se proietto verticalmente E sul disco equatoriale D ottengo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = D/$identifico pti antipodali su E = bordo di D

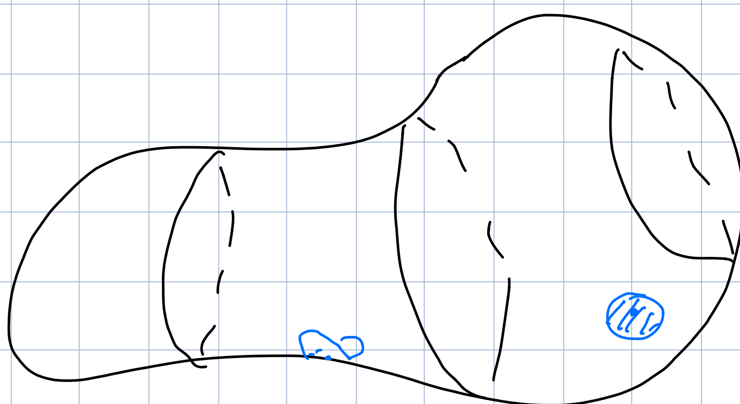
$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ = 

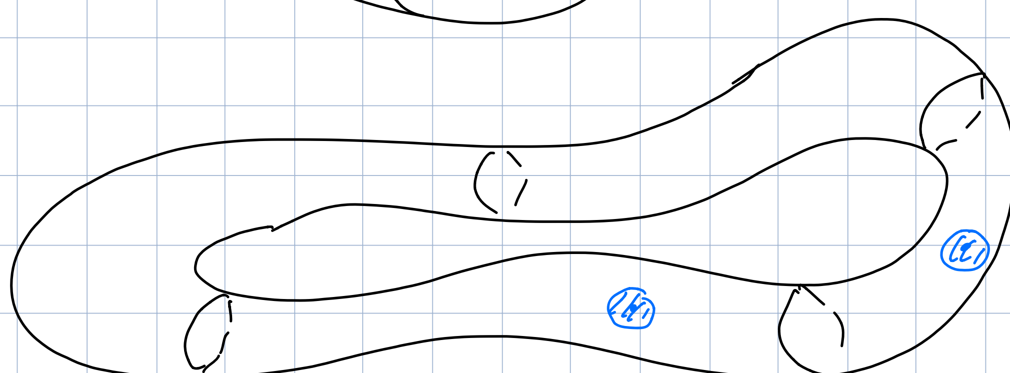
<u>Fatto</u>: è impossibile realizzare questo oggetto per intero in $\mathbb{R}^3$.

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

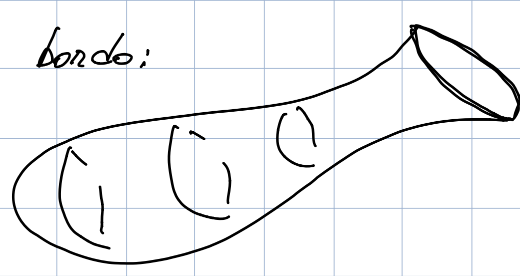


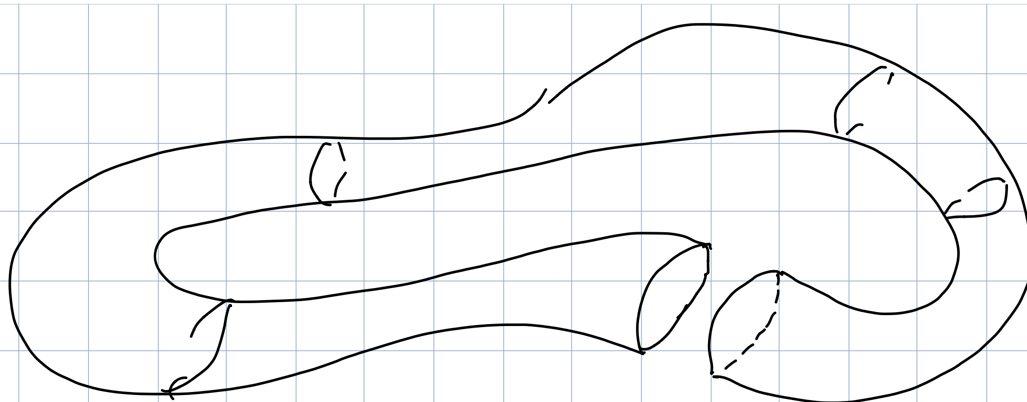
Fatto: è una superficie, cioè intorno a ogni punto è un piccolo disco.





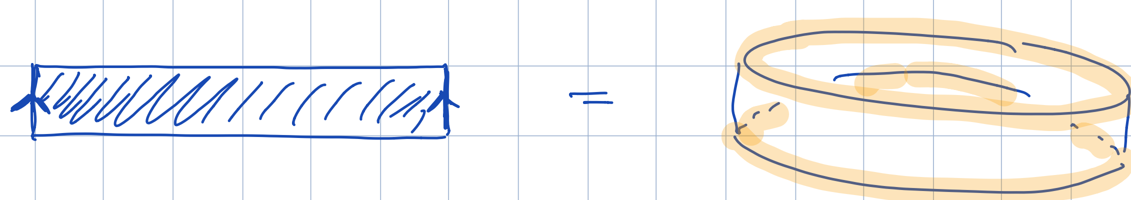
Superficie con bordo:



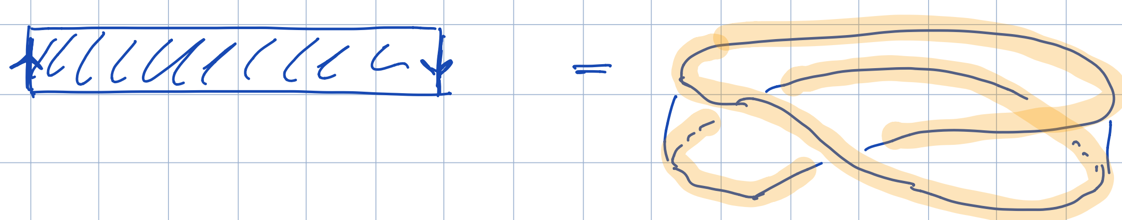


<u>Visto</u>: il piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è un oggetto ottenuto da un disco tramite incollamenti tra loro di parti del suo bordo.
[E' un oggetto astratto che <u>non</u> si può realizzare in $\mathbb{R}^3$.]

Esempi di altre superfici così ottenute che si possono realizzare in $\mathbb{R}^3$:



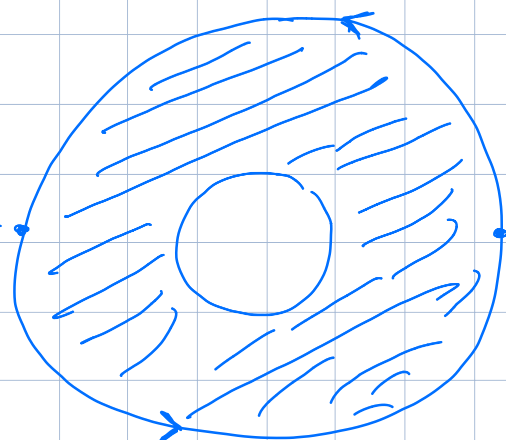
cilindro



nastro di Möbius

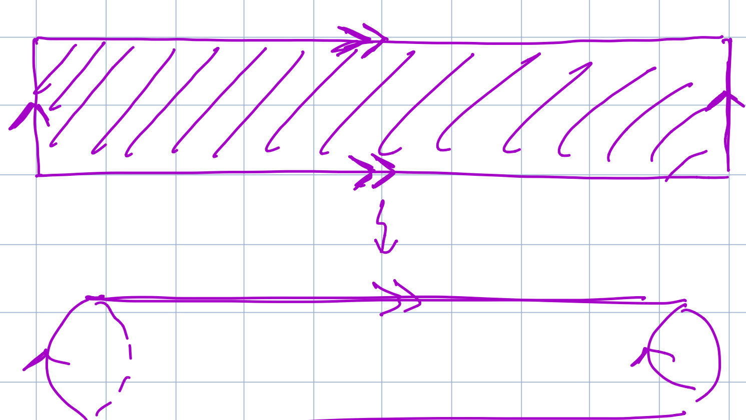
(realizzati in $\mathbb{R}^3$)

Esercizio:

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus (\text{dischetto}) =$  $=$ nastro di Möbius

Esercizio: stabilire cosa si trova tagliando per il lungo il nastro di Möbius in due o in tre.

Esempio: la superficie di una camera d'aria (toro) si può anche ottenere incollando i lati di una striscia di carta.



5