Lezione 03-05-2019

$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ (anche su $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$)

- Coordinate omogenee su $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Dato $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, indichiamo la classe di equivalenza di x rispetto alla relazione $x \sim \lambda \cdot x$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, con $[x_0 : x_1 : \ldots : x_n]$, dove $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

↳ usiamo : perché ci interessano i rapporti $x_i : x_j$

Osserviamo $[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \sim [\lambda x_0 : \lambda x_1 : \ldots : \lambda x_n] \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Ad esempio $[9 : -3 : 21] \sim [3 ; -1 : 7]$ - divido tutte le coordinate per 3.

Osservazione: Sia $p(x) \in \mathbb{R}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ un polinomio omogeneo di grado d in $n+1$ variabili

(Esempio: $x_0^2 + 3x_0 x_1 + 4x_2^2$ e' omogeneo di ~~grado~~ grado 2)

$\forall x \in \mathbb{R}^{n+1}$ $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, vale $p(\lambda x) = \lambda^d \cdot p(x)$.

Conseguenza: dato $p(x)$ omogeneo, e $[x] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

$$[x] = [x_0 : x_1 : \ldots : x_n]$$

vale che $p(x) = 0 \Leftrightarrow p(\lambda x) = 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

cioè $\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{p(x)} \Leftrightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{p(y)}, \ \forall y \in [x]$

$\Leftarrow$

$\Rightarrow y = \lambda x \quad p(y) = \lambda^d \cdot p(x)$, e se $p(x) = 0 \Rightarrow p(y) = 0$

Quindi in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ha senso considerare equazioni polinomiali omogenee nelle coordinate omogenee.

Oss: $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$.

questa scrittura è unica.

$$\mathbb{R}^n = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \mid x_0 \neq 0\} = \{[1 : y_1 : \dots : y_n] \mid y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}\}$$

poniamo $y_i = \frac{x_i}{x_0}$

$$\mathbb{P}^{n-1}_{\infty}(\mathbb{R}) = \{ [x_0, x_1, \dots, x_n] \mid x_0 = 0 \} = \{ [0, x_1, \dots, x_n] \}$$

↳ definito dal polinomio omogeneo di grado 1 $x_0 = 0$.

Esempi: Sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ sono definiti da polinomi omogenei di 1° grado.

Esempio: $X = \{ [x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : x_0 + 4x_1 - 7x_2 = 0 \}$,

X è immagine di $W \setminus \{0\}$, dove $W = \{ x \in \mathbb{R}^3 : x_0 + 4x_1 - 7x_2 = 0 \}$.

Esempio: Le coniche di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (definite da polinomi omogenei di grado 2).

- Coniche affini:
  - Ellisse: $x^2+y^2=1$
  - Parabola: $y=x^2$
  - Iperbole: $x^2-y^2=1$
  - $\emptyset$: $x^2+y^2+1=0$.

Le equazioni che definiscono le coniche affini non sono omogenee, pertanto non hanno senso in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, ma queste equazioni si ottengono ponendo $z=1$ nelle seguenti equazioni omogenee di grado 2 in x, y e z:

- Ellisse $x^2+y^2=z^2$
- Parabola: $yz=x^2$
- Iperbole: $x^2-y^2=z^2$
- ϕ: $x^2+y^2+z^2=0$

Equazioni omogenee delle coniche proiettive reali in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Contengono le coniche affini nella parte affine di: $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \underbrace{\mathbb{R}^2}_{\text{parte affine.}} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

- Ellisse affine $:= \{[x:y:z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : x^2+y^2=z^2\} \cap \overbrace{\{[x:y:z] : z \neq 0\}}^{\mathbb{R}^2}$

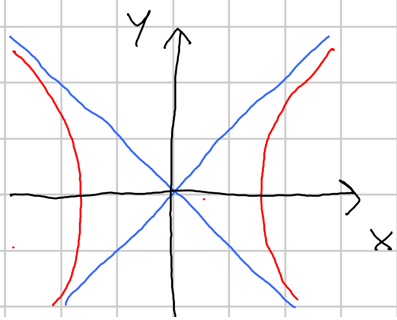
Punti all'∞ dell'ellisse:

$$\{[x:y:z]\in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : x^2+y^2=z^2\} \cap \{[x:y:z] : z=0\} =$$

$$= \{[x:y:0] : x^2+y^2=0\} = \emptyset \quad ([0:0:0] \notin \mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$$

- Iperbole $= \{[x:y:z]\in\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : x^2-y^2=z^2\}\cap\{z\neq 0\}$ → componente affine.

Punti all'∞: $\{[x:y:0]\in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid x^2-y^2=0\} = \{\underset{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}{\underset{\cap}{[1:1:0]}}, \underset{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}{\underset{\cap}{[1,-1,0]}}\}$

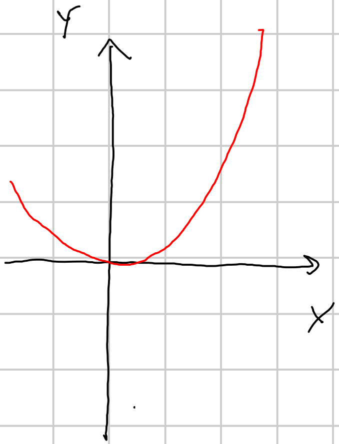


I punti all'∞ dell'iperbole corrispondono agli asintoti dell'iperbole

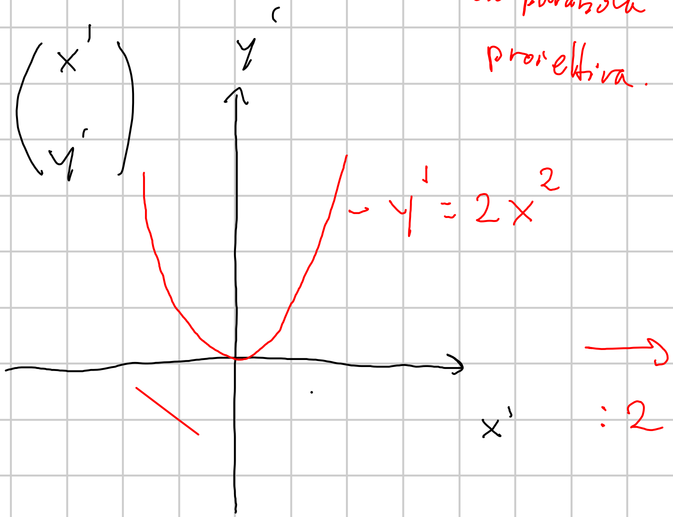
• Parabola: $\{[x:y:z] : yz = x^2\}$.

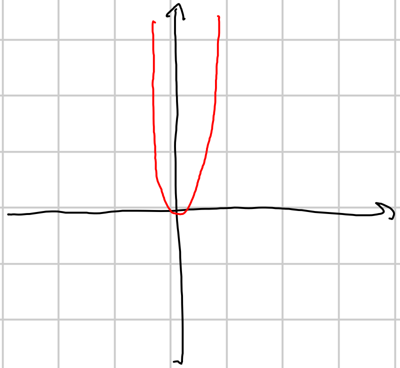
Punti all'∞ $\{[x:y:0] : x^2 = 0\} = \{[x:y:0] : x = 0\} = \{[0:1:0]\}$

un punto all'∞ per la parabola proiettiva.



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x/2 \\ y/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$





Il punto all'∞ della parabola proiettiva corrisponde all'asse della parabola affine

Altra interpretazione per le quadriche affini:

$$\mathcal{L} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} Q & b \\ {}^t b & c \end{pmatrix}}_{\text{matrice simmetrica}} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\} \text{ — quadrica affine.}$$

$$\to A = \begin{pmatrix} Q & b \\ {}^t b & c \end{pmatrix}$$

Esempio: Iperbole: $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : {}^t\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$

Completamento proiettivo di una quadrica affine è definito da:

$$\bar{\mathcal{L}} = \{ [x] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) : {}^t x A x = 0 \}$$ con A matrice simmetrica

$$\mathcal{L}_\infty = \bar{\mathcal{L}} \setminus \mathcal{L} = \text{parte all'infinito}.$$

$$\mathcal{L}_\infty = \{ \underset{\substack{\Uparrow \\ \mathbb{P}^n(\mathbb{R})}}{[x_1 : x_2 : \dots : x_n : 0]} : (x_1 \dots x_n, 0) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \}.$$