Esercitazione 09-05-19

10.2.7. Determinare il tipo della matrice A assegnata e la sua forma canonica.

j) $A = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 3+i & 1+2i \\ 1-2i & i-3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

Oss: A è unitaria: $A^* A = I$ $\rightarrow$ gli autovalori di A sono numeri complessi unitari.

$$p_A(t) = \det(tI - A) = t^2 - \frac{2i}{\sqrt{15}} \cdot t - 1$$

Cerchiamo le radici di $\sqrt{15}\, t^2 - 2i \cdot t - 15$.

Gli autovalori sono $\lambda_{1,2} = \dfrac{2i \pm \sqrt{56}}{2\sqrt{15}} = \dfrac{2i \pm 2\sqrt{14}}{2\sqrt{15}} = \dfrac{i \pm \sqrt{14}}{\sqrt{15}}$ → sono numeri complessi unitari.

Autovettori: $A - \lambda_1 I = \dfrac{1}{\sqrt{15}} \cdot \begin{pmatrix} 3-\sqrt{14} & 1+2i \\ 1-2i & -3-\sqrt{14} \end{pmatrix}$

Autovettore: $v_1 = \begin{pmatrix} 1+2i \\ \sqrt{14}-3 \end{pmatrix}$ per λ_1

Autovettore v_2 per λ_2, $v_2 = \begin{pmatrix} 1+2i \\ -\sqrt{14}-3 \end{pmatrix}$.

Nella base $\{v_1, v_2\}$, la matrice A si scrive come:

$$\frac{1}{\sqrt{15}} \cdot \begin{pmatrix} i\sqrt{14} & 0 \\ 0 & i-\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

forma canonica.

(l) $A = \begin{pmatrix} 29i & -4-3i \\ 4-3i & 5i \end{pmatrix}$. A è anti-hermitiana, cioè $A^* = -A$

A avrà autovalori puramente immaginari.

$p_A(t) = \det(tI - A) = t^2 - 34i \cdot t - 120$

Autovalori $\lambda_{1,2} = \dfrac{34i \pm \sqrt{-676}}{2} = \dfrac{34i \pm 26i}{2}$ $\qquad \underbrace{\lambda_1 = 30 \cdot i, \ \lambda_2 = 4i}$

↳ sono immaginari puri.

Autovettore per λ_1:

$A - 30I = \begin{pmatrix} -i & -4-3i \\ 4-3i & -25i \end{pmatrix} \to$ Autovettore $v_1 = \begin{pmatrix} 4+3i \\ -i \end{pmatrix}$

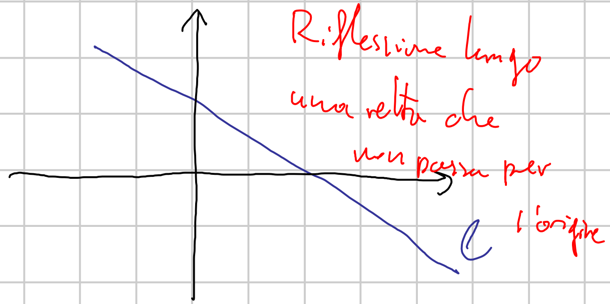
v_2 autovettore per $\lambda_2 = 4i$, $v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 4-3i \end{pmatrix}$

Nella base $\{v_1, v_2\}$, A si scrive come $\begin{pmatrix} 30i & 0 \\ 0 & 4i \end{pmatrix}$.

11.1.1. Determinare l'espressione dell'isometria φ di $\mathbb{R}^2$ descritta.

(b) La riflessione rispetto alla retta ℓ di equazione $4x+7y=3$.

- Cerchiamo un punto di ℓ, ad esempio $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$



La riflessione rispetto a ℓ si ottiene come composizione delle seguenti isometrie:

$x \mapsto x - v$

① La traslazione lungo $-v$ (Manda ℓ nella sua giacitura $\ell' = \{4x+7y=0\}$

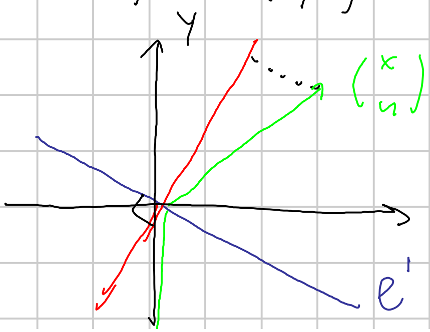
② La riflessione φ_0 rispetto a $\ell' = \{4x+7y=0\}$ → trovare la matrice che rappresenta φ_0 rispetto alla base canonica.

③ La traslazione lungo v $(x \mapsto x+v)$

$w \in \ell'^{\perp}$

$$\varphi_0\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 \cdot \boxed{\frac{4x+7y}{\underbrace{16+49}_{=\,4^2+7^2\,=\,\langle w,w\rangle}} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}}^{w}}$$

→ proiezione di $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sulla retta ortogonale a ℓ.



$\downarrow \varphi_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\varphi_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{8}{65} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{65} \begin{pmatrix} 33 \\ -56 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{14}{65} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{65} \cdot \begin{pmatrix} -56 \\ 33 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_0 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{65} \cdot \begin{pmatrix} 33 & -56 \\ -56 & -33 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

de cui:

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = v + \varphi_0 \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - v \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{65} \begin{pmatrix} 33 & -56 \\ -56 & -33 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{65}\begin{pmatrix} 33 & -56 \\ -56 & 33 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{isometria lineare}} + \underbrace{\frac{1}{65}\cdot\begin{pmatrix} 24 \\ 42 \end{pmatrix}}_{\text{traslazione}}$$

(matrice ortogonale)

(d) La rotazione φ di angolo $\Theta = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$ intorno al punto $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = v$.

φ è composizione di:

① Traslazione lungo $-v$ $(v \mapsto 0)$

② Rotazione φ_0 di angolo Θ nell'origine

③ Traslazione lungo v.

$$\varphi_0\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

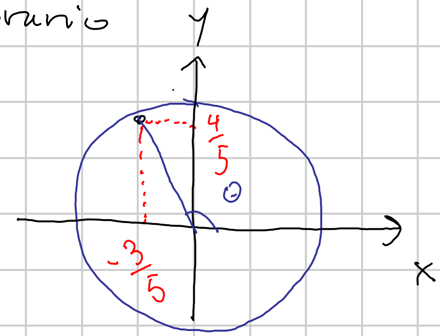
$\theta = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$.

$\cos\theta = -\frac{3}{5}$

Per trovare $\sin\theta$, usiamo il fatto $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

$\Rightarrow \sin^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$. Scegliamo $\sin\theta = \frac{4}{5}$ in modo da avere una rotazione in senso anti orario

$$\varphi_0\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 4 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$



Da cui

$$\varphi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = v + \varphi_0\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - v\right) = \begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & -4\\+4 & -3\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -4\\4 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{\text{parte lineare (ortogonale)}} + \underbrace{\begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix}}_{\text{traslazione}}$$