Geometria 9/5/19

Classificazione affine quadriche non deg.

Teo: $\mathcal{I} = \{ x \in \mathbb{R}^3 : {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \}$ $\det(A) \neq 0$, A simm
si trasforma in uno dei 6 modelli vie canonici affini, determinato dai segni degli autoval. di A e di Q
$A = \begin{pmatrix} Q & {}^t\ell \\ \ell & c \end{pmatrix}$.

Dim: trasf. lecite sono

(i) $A \rightsquigarrow {}^tMAM$, $Q \rightsquigarrow {}^tBQB$ (ii) $A \rightsquigarrow kA$, $Q \rightsquigarrow kQ$, $k>0$ (iii) $A \rightsquigarrow -A$, $Q \rightsquigarrow -Q$.

Affermo che i casi possibili per Q sono questi 4 e che sono preservati dalle trasf. lecite:

1) autoval tutti concordi $+++$ $\quad ---$
2) autoval non nulli non concordi $++-$ $\quad +--$
3) 2 autoval concordi, uno nullo $++0$ $\quad --0$
4) 2 autoval discordi, uno nullo $+-0$

$+00 \quad -00 \quad 000$

devo provare che questi sono impossibili: infatti

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

però questa ha $\det = 0$ mentre $\det(A) \neq 0$ si preserva.

Preservati: con (i) e (ii) i segni non cambiano,
con (iii) cambiano tutti.

Ora affermo che nei casi 1-4 per Q sono possibili solo questi casi per A e $\mathcal{L}$ è così determinata:

1.1) Tutti concordi $\longrightarrow \emptyset$

1.2) 3 concordi, uno discorde $\longrightarrow$ ellissoide

2.1) $2+2 \longrightarrow$ iperb iperb.

2.2) $3+1 \longrightarrow$ iperb. ell.

3) $3+1 \longrightarrow$ parab. ell.

4) $2+2 \longrightarrow$ parab. iperb.

Si procede come per le coniche diagonalizzando Q via Teo spettrale, riducendosi ad autoval ± 1 o 0, traslando per avere parte lineare con nulli 0:

$$1+2 \quad A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & * \\ 0 & \lambda_2 & 0 & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & \pm 1 & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

1.1	1.2	2.1	2.2
$x^2+y^2+z^2+1=0$	$x^2+y^2+z^2=1$	$x^2+y^2=z^2+1$	$x^2+y^2=z^2-1$
$\emptyset$	ell.	ip. ip.	ip. ell.

3+4 : analog.

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & * \\ 0 & \lambda_2 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{matrix}} & 0 & \boxed{\begin{matrix} * \\ * \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 0 & * \\ \boxed{\begin{matrix} * & * \end{matrix}} & * & * \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$+$: $z = x^2 + y^2$ parab. ell.

$-$: $z = x^2 - y^2$ parab. ip. ▨

Come stabilire, data equaz. (cioè A), di quale quadrica si tratta. Due casi:

- a meno di riordinare le coord. ho $d_2 \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}}^{\,Q} & \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \\ \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} & \cdot \end{pmatrix}$$

ci sono 3 det 2x2 dentro Q che posso usare come d_2.

- $d_2 = 0$ per qualsiasi riordinamento

cf. libro: caso molto particolare che non capita

Come stabilire il tipo affine per $d_2 \neq 0$.

$\boxed{d_2 > 0}$ non può essere $\begin{pmatrix} \boxed{0} & k \\ k & \boxed{0} \end{pmatrix} \Rightarrow$ dentro ho $d_1 \neq 0$.

$\longrightarrow d_3 = 0 \longrightarrow$ parab. ell. $(d_4 \neq 0)$

$\longrightarrow d_1 \cdot d_3 > 0$

- $\nearrow d_4 > 0$ $\quad + + + +$ / $- - - -$ $\quad \emptyset$
- $\searrow d_4 < 0$ $\quad \pm \pm \pm \mp$ $\quad$ ellissoide

$\longrightarrow d_1 \cdot d_3 < 0$

- $\nearrow d_4 > 0$ $\quad + + - -$ / $- - + +$ $\quad$ ipab. ipab.
- $\searrow d_4 < 0$ $\quad \pm \pm \mp \pm$ $\quad$ ipab. ell.

$\boxed{d_2 < 0} \longrightarrow d_3 = 0 \longrightarrow$ parab. ipab. $(d_4 \neq 0)$

$\longrightarrow d_3 \neq 0$

- $\nearrow d_4 > 0$ $\quad + - + -$ $\quad x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0 \quad x^2 + z^2 = 1 + y^2$
  $\quad + - - +$ $\quad x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0 \quad y^2 + z^2 = 1 + x^2$
  ipab. ipab.
- $\searrow d_4 < 0$ $\quad + - + +$ / $+ - - -$ $\quad$ ipab. ell.

Suggerimento: NON ricordare a memoria questa casistica: INVECE ricordare che i segni di d_1, d_2, d_3, d_4 (dopo eventuale riordino delle coord) consentono di trovare i segni degli autoval di Q e A.

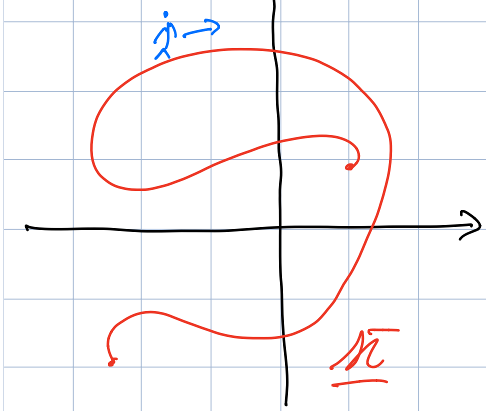
d_1 (se $\neq 0$) dà segno primo autoval di Q e A

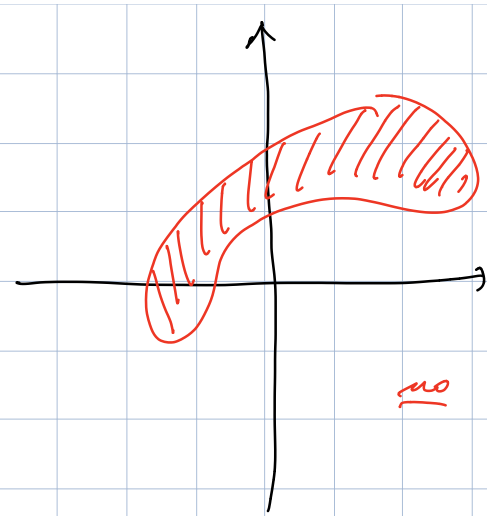
d_2 $(\neq 0)$ dà il prodotto dei segni dei primi 2 di Q e A

d_3 dà il prodotto dei segni dei primi 3 di Q e A

d_4 dà il prodotto di tutti e 4 di A.

Curve. "curva" = sottoinsieme unidimensionale di $\mathbb{R}^n$.

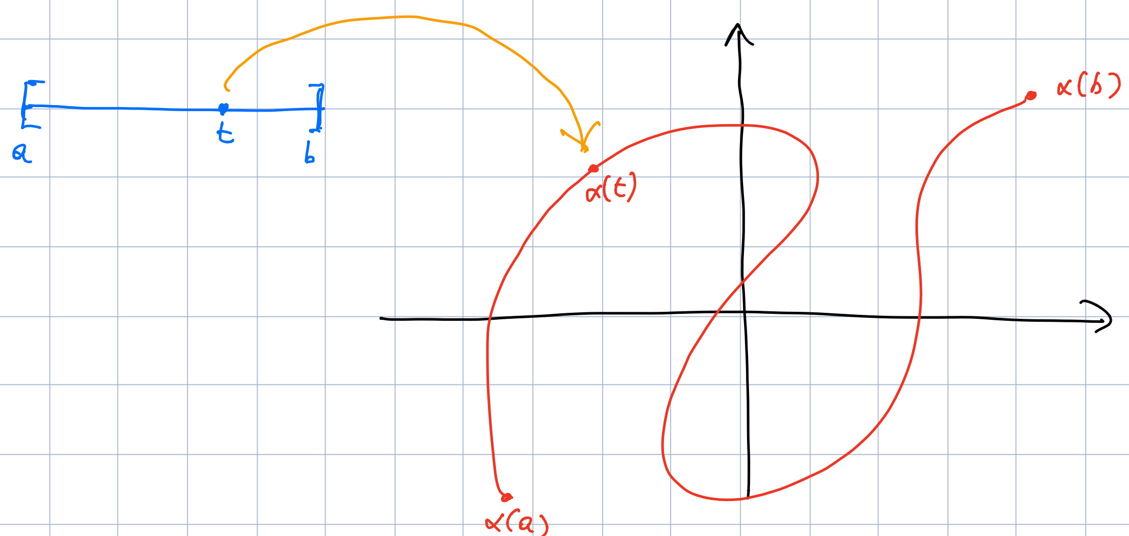




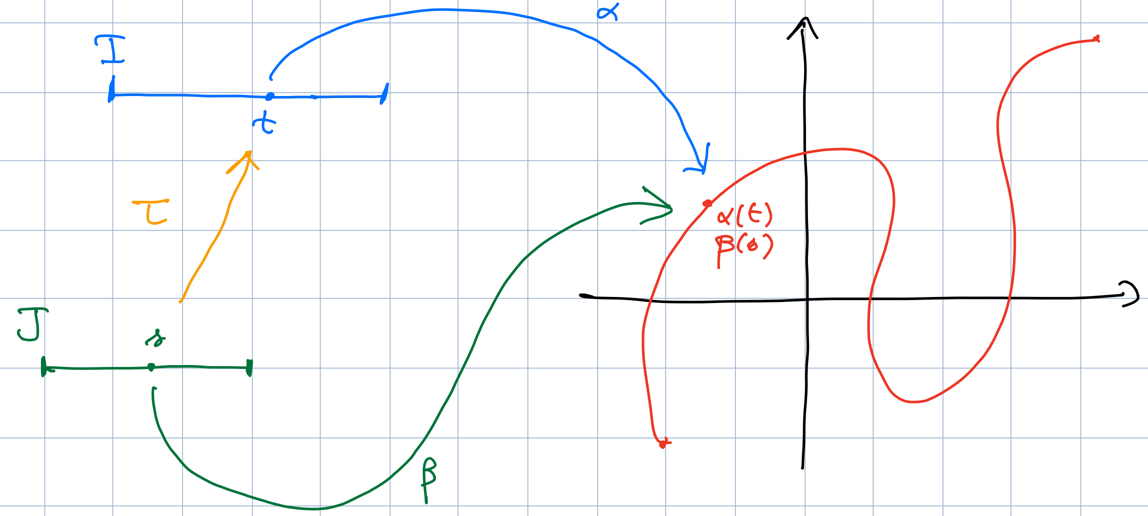
Def: una curva parametrizzata in $\mathbb{R}^n$ è una funzione $\alpha: I \to \mathbb{R}^n$ continua dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo (chiuso, aperto, semiaperto, limitato o no a sin e/o a destra)

<u>ATTENZIONE</u>: accettando α solo continua senza altre richieste ci possono essere patologie (non rispondenti all'intuizione).

Rimedio: chiedere α o iniettiva o derivabile.

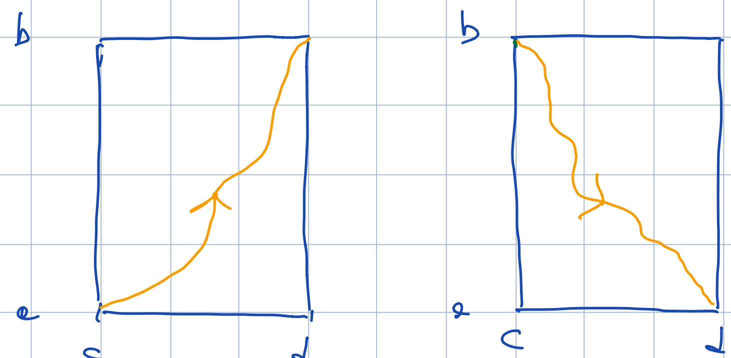


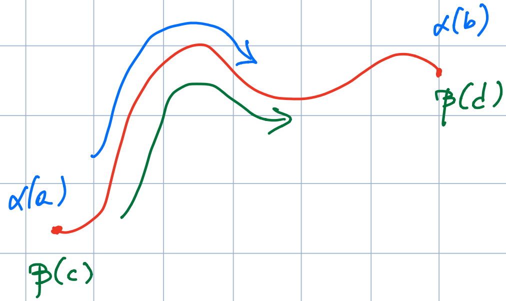
Si chiama _supporto_ di α la sua immagine.
Si dice inoltre che $\beta : J \to \mathbb{R}^n$ è ottenuta da α per cambio di parametrizzazione se:

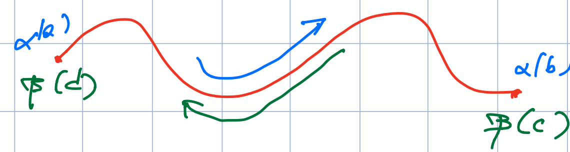


esiste $\tau : J \to I$ funzione bigettiva t.c.
$$\beta(s) = \alpha(\tau(s)).$$

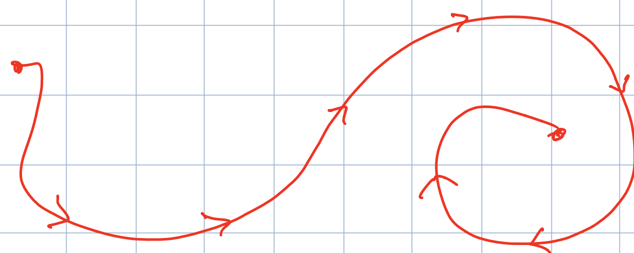
Oss: prendiamo per semplicità $I = [a,b]$, $J = [c,d]$.
$\tau : J \to I$ bigettiva è o crescente o decrescente:







Chiamo <u>curva orientata</u> una curva con verso di percorrenza specificato:



Per curve orientate si accettano solo cambi di parametrizzazione con τ crescente.