Lezione 15-05-19

Def: Una curva parametrizzata in $\mathbb{R}^n$ è una funzione

$\alpha: I \to \mathbb{R}^n$ continua $I \subset \mathbb{R}$ intervallo

Def: $\alpha: I \to \mathbb{R}$ è regolare se le componenti di α

hanno derivata continua e, per ogni $t \in I$ $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1'(t) \\ \alpha_2'(t) \\ \vdots \\ \alpha_n'(t) \end{pmatrix}$ è non nullo

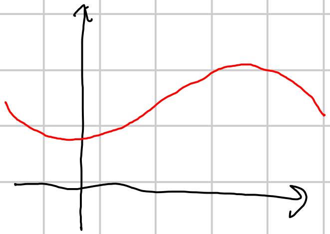
$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \end{pmatrix}$$

$\neq 0$ come vettore di $\mathbb{R}^n$.

Def: $\alpha: I \to \mathbb{R}^n$ è regolare a tratti se è possibile suddividere

I in un numero finito di sottointervalli su ciascuno dei quali
la restrizione di α è regolare.

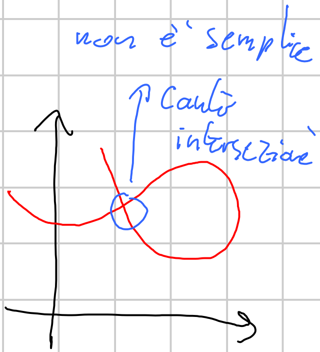
Esempi: α regolare:



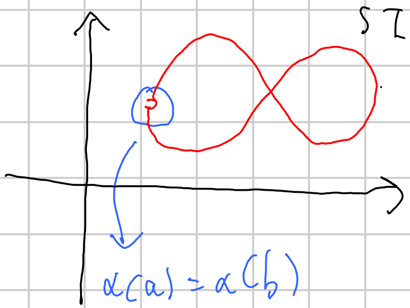
α regolare a tratti:

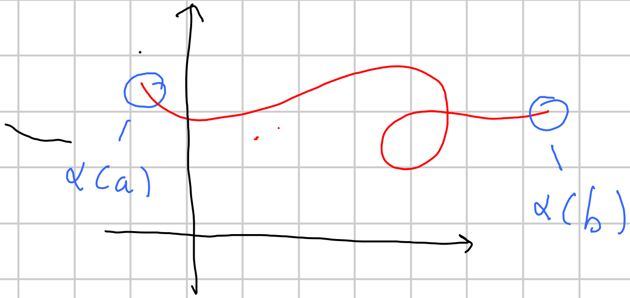
Def: $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ è semplice se α è iniettiva su I:

SI

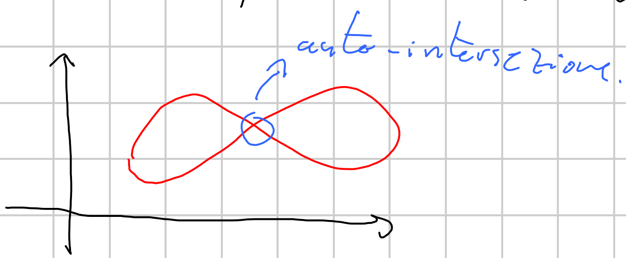


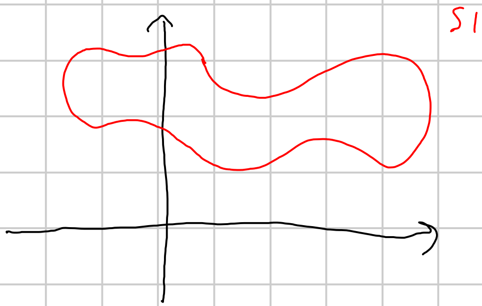
∘ $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ è chiusa se $I = [a, b]$ e $\alpha(a) = \alpha(b)$





∘ $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ è semplice e chiusa se $I = [a, b]$, $\alpha(a) = \alpha(b)$, α iniettiva su $[a, b)$.

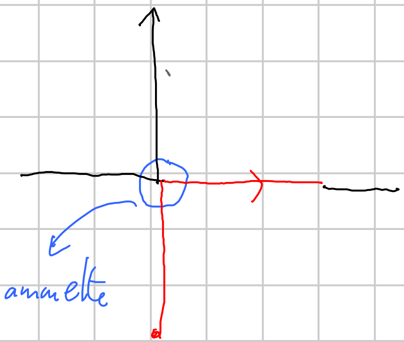




Oss: $\alpha: I \to \mathbb{R}^n$ e' regolare. Allora in ogni punto c'e' una retta tangente (Serve $\alpha'(t) \neq 0 \ \forall t$).

Esempio 1:

$$\alpha(t) = \begin{cases} (0, t^3) & \text{se } -1 \leq t \leq 0 \\ (t^3, 0) & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \qquad I = [-1, 1]$$



α e' derivabile lontano da $t=0$.

$$\alpha'(t) = \begin{cases} (0, 3t^2) & t \leq 0 \\ (3t^2, 0) & t > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{t \to 0} \alpha'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \text{ e' derivabile ovunque } \cancel{\text{in}} \ [-1,1] \text{ con}$$

derivata $\alpha'(t)$ continua, però non ammette una retta tangente in $\alpha(0) = (0,0)$ $\left(\alpha'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

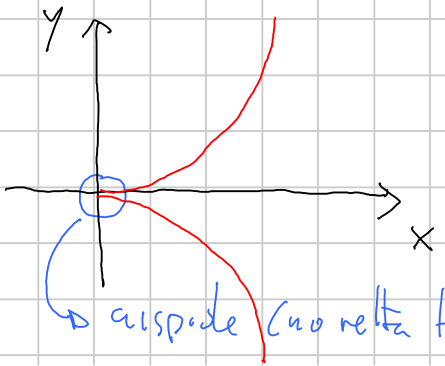
Esempio 2: $\alpha(t) = (t^2, t^3)$ $t \in [-1,1]$

- Per $t \geq 0$ $\alpha(t) = (x,y)$, allora $x = t^2$, $y = t^3 \Rightarrow t = \sqrt{x}$

$$\Rightarrow y = x^{3/2} \;\Big)\; t \geq 0$$

- Per $t < 0$ $\alpha(t) = (x,y)$, $\Rightarrow x = t^2$, $y = t^3 \Rightarrow t = -\sqrt{x}$

$$\Rightarrow y = -x^{3/2} \;\Big)\; t < 0$$



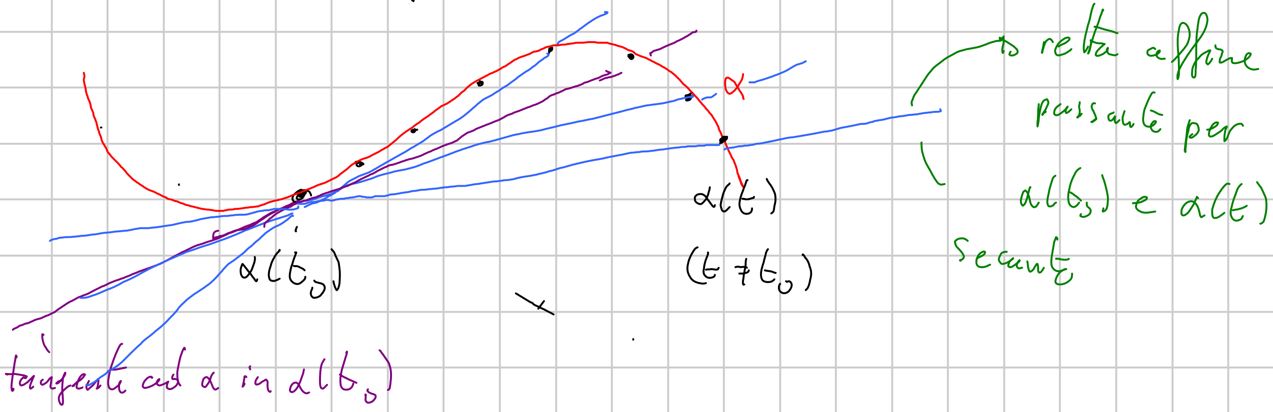
$\rightarrow$ cuspide (no retta tangente)

$\alpha(t)$ è derivabile ∞ volte in $[-1,1]$

ma $\alpha'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Retta tangente a una curva

$\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ regolare. Sia $t_0 \in I$

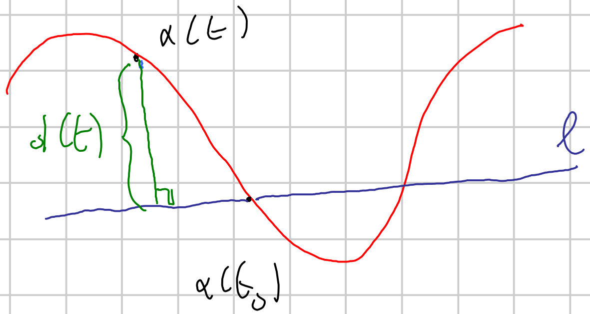


Tangente ad α in $\alpha(t_0)$ = limite per $t \to t_0$ delle secanti

retta affine passante per $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t)$

La tangente ad α in $\alpha(t_0)$ è la retta che ha un contatto duplice con α in $\alpha(t_0)$

- Fisso $t_0 \in I$, e considero una retta affine ℓ passante per t_0



Definiamo $d(t) = dist(\alpha(t), \ell)$
$t \in I$

Osservazione: $d(t_0) = 0 \Leftrightarrow \ell$ passa per $\alpha(t_0)$

Chiedere che ℓ sia la tangente ad α in $\alpha(t_0)$ significa chiedere che $d(t_0)$ e $d'(t_0) = 0$

$\Rightarrow$ Definizione di retta tangente ad α in $\alpha(t_0)$

Prop: Se $\alpha: I \to \mathbb{R}^n$ è regolare, $t_0 \in I$, la retta per $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t)$ tende (per $t \to t_0$) a $\alpha(t_0) + \mathrm{Span}(\alpha'(t_0))$.

espressione parametrica per la retta tangente ad α in $\alpha(t_0)$

Inoltre essa è l'unica retta con contatto duplice con α in $\alpha(t_0)$.

Dim: La retta passante per $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t)$ è

$$\left(\underbrace{\alpha(t_0) + \mathrm{Span}(\alpha(t) - \alpha(t_0))}\right) = \alpha(t_0) + \mathrm{Span}\left(\frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t - t_0}\right)$$

Forma parametrica della secante per $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t)$

$\lim t \to t_0$

$\alpha'(t_0)$

$$\lim_{t \to t_0} \left(\quad \right) = \alpha(t_0) + \mathrm{Span}(\alpha'(t_0))$$

Contatto duplice (caso $n=2$)

$\ell : ax+by+c$ - forma cartesiana per retta affine in $\mathbb{R}^2$ $(a^2+b^2=1)$

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} \qquad d(t) = \left| a \cdot X(t) + b \cdot Y(t) + c \right| =$$

$$= \sqrt{\left(a \cdot X(t) + b \cdot Y(t) + c\right)^2}$$

∘ Sia $t_0 \in I$. Se $d(t_0) = 0$, $\underbrace{c = -\left(a \cdot X(t_0) + b \cdot Y(t_0)\right)}_{\text{condizione affinché } \ell \text{ passi per } \alpha(t_0)}$

∘

$$d'(t) = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}\cdot(a\cdot X(t)+b\cdot Y(t)+c)}{\underbrace{\sqrt{(aX(t)+b\cdot Y(t)+c)^2}}_{\text{vale } \pm 1 \text{ a seconda del segno del numeratore}}} \cdot (a\cdot X'(t)+b\cdot Y'(t))$$

vale ± 1 a seconda del segno del numeratore

$x \in \mathbb{R}$

$$\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

Quindi:

$d'(t) \to 0$ per $t \to t_0$

$\Updownarrow$

$a\cdot X'(t_0)+b\cdot Y'(t_0)=0$

$\Updownarrow$

la giacitura di ℓ e' proprio

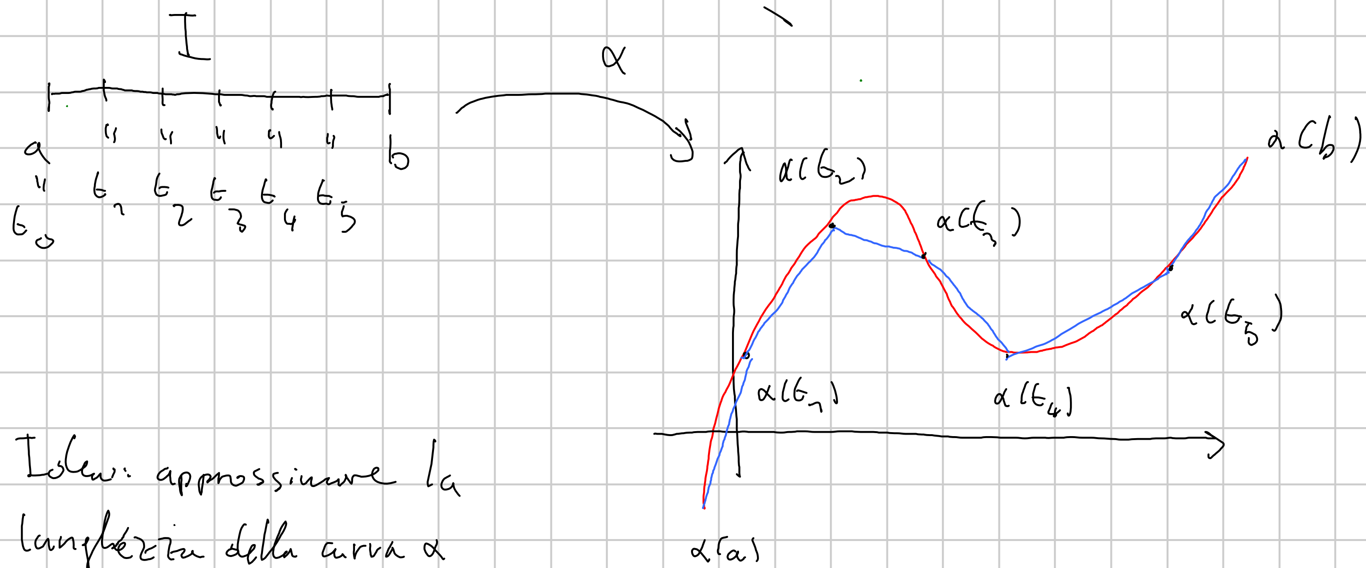
$ax+by=0$

$$\alpha'(t_0) = \begin{pmatrix} X'(t_0) \\ Y'(t_0) \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ appartiene alla giacitura di ℓ.

Lunghezza di una curva.

$\alpha : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ regolare



Idea: approssimare la lunghezza della curva α tramite la somma delle lunghezze dei segmenti tra $\alpha(t_i)$ e $\alpha(t_{i+1})$ $i=0,\dots n-1$

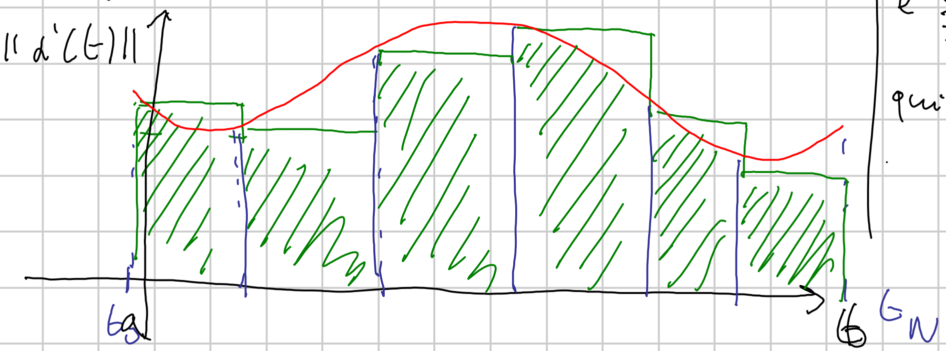
$$L(\alpha) = \lim_{\substack{N\to+\infty \\ |t_{i+1}-t_i|\to 0}} \sum_{i=0}^{N-1} \| \boxed{\alpha(t_{i+1})} - \alpha(t_i) \| =$$

$$\parallel$$

$$= \lim_{\substack{N\to+\infty \\ |t_{i+1}-t_i|\to 0}} \sum_{i=0}^{N-1} \| \boxed{\cancel{\alpha(t_i)} + \alpha'(t_i)\cdot(t_{i+1}-t_i)} - \cancel{\alpha(t_i)} \| =$$

$$= \lim \sum_{i=0}^{N-1} \|\alpha'(t_i)\|\cdot(t_{i+1}-t_i) \quad (*)$$

Poiché α è regolare $\|\alpha'(t)\|$ è continua e ≥ 0 su $[a,b]$ e quindi integrabile.



Inoltre (*) tende (per $N \to +\infty$, e $\max_{0 \le j \le N-1} (t_{j+1} - t_j) \to 0$) a

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| \cdot dt$$

Def: Se $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è regolare, chiamiamo lunghezza di α la quantità $L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| \cdot dt$

Def: Per curve regolari a tratti si definisce la lunghezza come la somma delle lunghezze dei tratti in cui è regolare

$$L(\alpha)=L(\alpha_1)+L(\alpha_2)+L(\alpha_3)$$

Oss: Se β è ottenuta da α tramite un cambiamento di parametro, allora $L(\alpha)=L(\beta)$.

Dim: Sia $\beta(s)=\alpha(\tau(s))$ con $\tau:\underbrace{[c,d]}_{\text{dominio di } \beta}\longrightarrow\underbrace{[a,b]}_{\text{dominio di } \alpha}$ $\tau'\neq 0$

$\tau'(s)\neq 0$ $\forall\, s\in[c,d]$

$$\|\beta'(s)\|=\|\alpha'(\tau(s))\|\cdot|\tau'(s)|$$ – Formula di integrazione delle funzioni composte

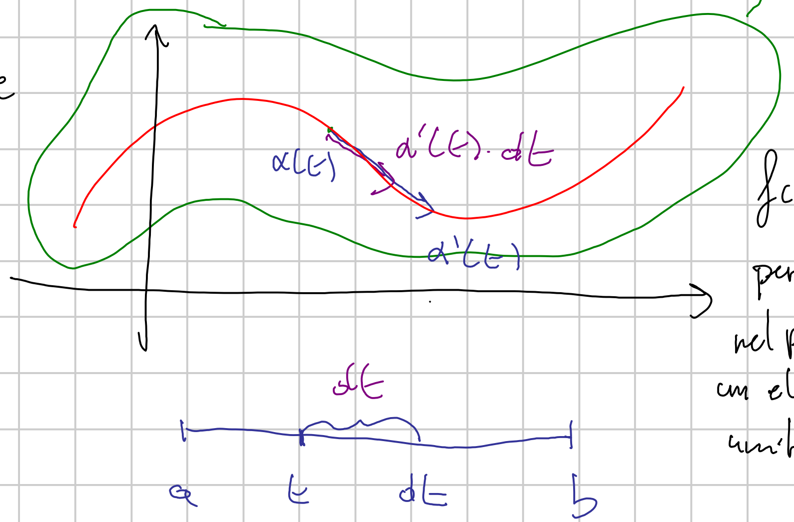
$$L(\beta)=\int_c^d \|\beta'(s)\|\cdot ds=\int_c^d \|\alpha'(\tau(s))\|\cdot|\tau'(s)|\cdot ds=\int_a^b \|\alpha'(t)\|\cdot dt=L(\alpha)$$

$t=\tau(s)$ — cambio di variabile (integrazione per sostit.)

Integrale su una curva di una funzione.

$\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ regolare

$I = [a,b]$



$f : \Omega \to \mathbb{R}$

$f(x,y) =$ "costo" per percorrere nel punto (x,y) un elemento unitario di lunghezza

Costo complessivo per percorrere la curva α come

$$\int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \underbrace{\|\alpha'(t)\| \cdot dt}_{\text{elemento di lunghezza}}$$

→ pesato con il costo unitario in un punto

– Def: Integrale della funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ lungo la curva parametr. α

$= \int_\alpha f$

Prop.: Se α, β parametrizzano la stessa curva, allora $\int_\alpha f = \int_\beta f$

Dim: analoga a prima (caso delle lunghezze)

(Derivazione funzioni composte + cambio di parametro nell'integrale).