Lezione + Esercitazione 16-05-19

Def: $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ regolare. Diciamo che α è in parametro d'arco

se $\|\alpha'(t)\| = 1$. $\forall t \in [a,b]$.

Prop: Ogni curva regolare si può riparametrizzare in parametro d'arco.

Dim: Data $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ regolare. Cerchiamo $\beta = \alpha \circ \tau$, $\tau : [c,d] \to [a,b]$

tale che $\|\beta'\| \equiv 1$.

Definiamo $\sigma(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| \cdot du \to$ spazio percorso nel tratto di α parametrizzato da $[a,t]$.

$\sigma : [a,b] \to [0,L]$, dove $L = L(\alpha)$

$\sigma'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$ (Teo fondamentale del calcolo integrale).

$\Rightarrow \sigma$ è crescente $\Rightarrow \sigma$ è invertibile.

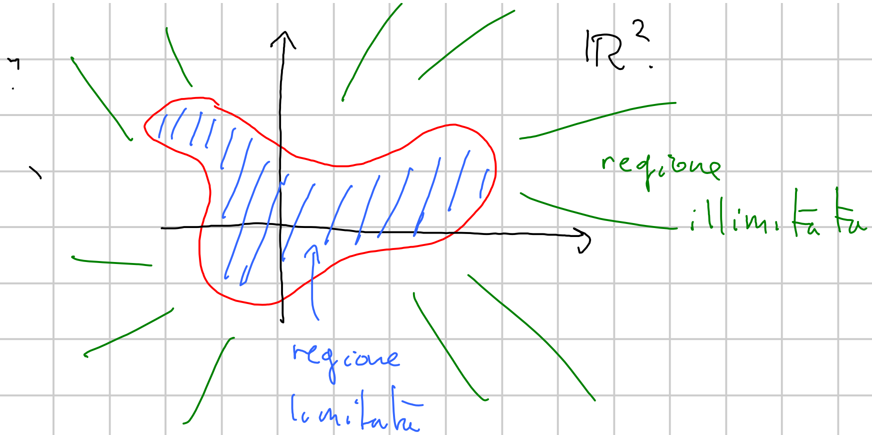
Poniamo $\tau = \sigma^{-1} : [0, L] \to [a, b]$. Poniamo $\beta = \alpha \circ \tau$

$$\beta'(s) = \alpha'(\tau(s)) \cdot \tau'(s) = \alpha'(\tau(s)) \cdot \frac{1}{\sigma'(\tau(s))} = \alpha'(\tau(s)) \cdot \frac{1}{\|\alpha'(\tau(s))\|}$$

Quindi $\|\beta'(s)\| = 1 \Rightarrow \beta$ è in parametro d'arco.

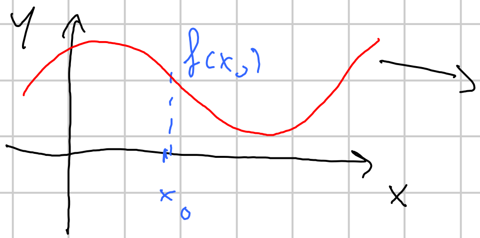
— o —

· Teorema di Jordan: Se α è una curva semplice e chiusa in $\mathbb{R}^2$, allora il supporto di α separa $\mathbb{R}^2$ in due regioni, una limitata e l'altra no.



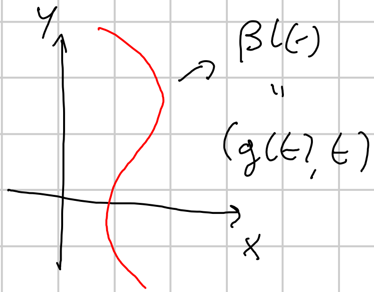
∘ Grafici di funzioni:

Osservazione: Se $f(x): I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, il grafico di $y = f(x)$ è una curva parametrizzata.

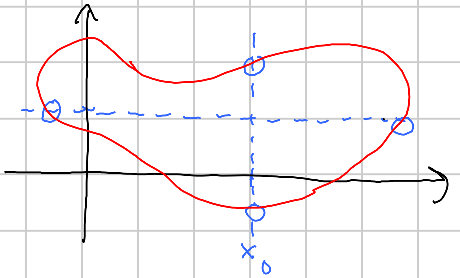


$\alpha(t) = (t, f(t))$

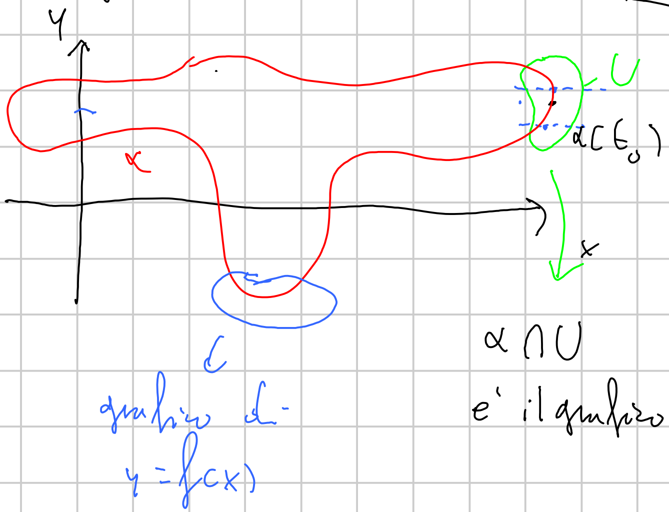
Similmente se $x = g(y)$



Oss: Non tutte le curve sono grafici di funzioni:



Oss: Ogni curva parametrizzata è <u>localmente</u> il grafico di una funzione



$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$

$t_0 \in [a,b]$

$\alpha \cap U$

è il grafico di una funzione $x = g(y)$

Idea di dimostrazione. $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}$ regolare $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \neq 0 \ \forall t \in [a,b]$

Dato $t_0 \in [a,b]$, almeno uno tra $x'(t_0)$ e $y'(t_0)$ è $\neq 0$.

- Supponiamo $x'(t_0) \neq 0$. Allora in $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, $x(t)$ è strettamente crescente oppure strettamente decrescente (a seconda del segno di $x'(t_0)$).

In particolare $x(t)$ è invertibile in $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, con inversa x^{-1}.

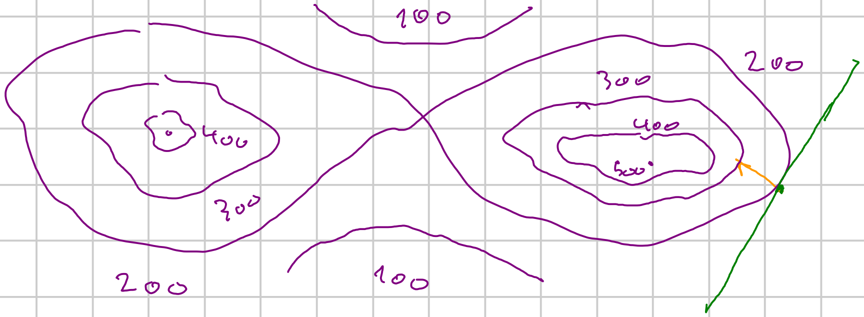
- Riparametrizziamo la restrizione di α a $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, prendendo

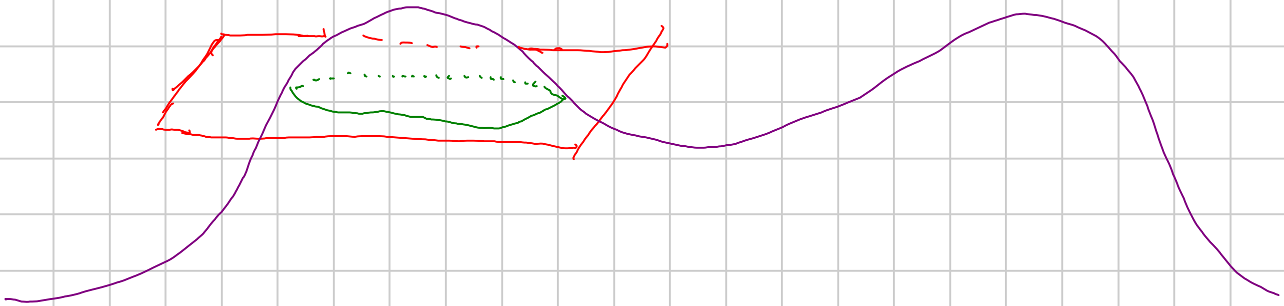
$$\beta(s) = \begin{pmatrix} s \\ y(x^{-1}(s)) \end{pmatrix}$$

} – parametrizzazione per il grafico di $y = g(x)$, con $g(s) = y(x^{-1}(s))$

- Curve di livello di funzioni.

Cartina altimetrica



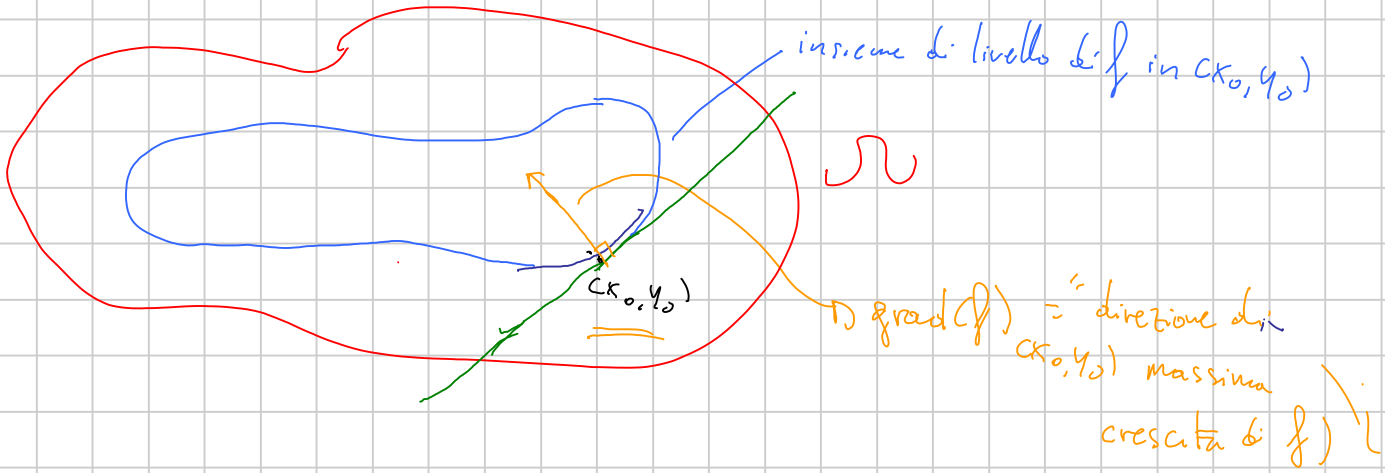


Teo: Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^2)$, con f differenziabile.

Supponiamo che $\forall$ punto $(x_0, y_0) \in \Omega$, valga $\text{grad}(f)\big|_{(x_0,y_0)} \neq 0$.

Allora l'insieme di livello di f in (x_0, y_0) e' una curva vicino a (x_0, y_0) con vettore tangente perpendicolare a $\text{grad}(f)\big|_{(x_0,y_0)}$

$\Rightarrow \{(x,y) \in \Omega \mid f(x,y) = f(x_0, y_0)\}$



11.2.1. Classificare a mezzo di trasformazioni affini la conica data.

(h) $3x^2-6xy+6y^2-2x-2y-5=0$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -3 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$d_1=3>0 \quad d_2=18-9=9>0$

$d_3=\det(A)=-60$

$d_3\neq 0$ la conica è non degenere

$d_2>0,\ d_1\cdot d_3<0 \Rightarrow$ ellisse.

(g) $4x^2-20xy+25y^2-2x+5y-12=0$ $*$

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -10 & -1 \\ -10 & 25 & 5/2 \\ -1 & 5/2 & -12 \end{pmatrix}$$

$d_1=4>0 \quad d_2=0 \quad d_3=\det(A)=0$

Conica degenere.

Riscriviamo * come

$(2x-5y)^2 - (2x-5y) - 12 = 0$ Poniamo $t = 2x-5y$ e

riscriviamo come $t^2 - t - 12 = 0$

$$\| $$

$$(t-4)\cdot(t+3) = 0$$

$$\| $$

$$(2x-5y-4)\cdot(2x-5y+3) = 0$$

$$\{2x-5y-4=0\} \cup \{2x-5y+3=0\}$$

Due rette parallele

Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il tipo affine della conica definita dall'equazione assegnata.

(b) $x^2 + kxy - 3y^2 + 2x + y + 1 = 0$

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k/2 & 1 \\ k/2 & -3 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = -\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{2}k - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}(k-1)^2.$$

La conica è degenere $\Leftrightarrow k=1$.

- Per $k=1$ $\quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -3 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$. Cerchiamo v_0 autovettore per l'autovalore $\lambda = 0$

$v_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ giace sulla conica.

↳ lo scegliamo in modo che la 3^a coord. sia $= a\ 1$

Cambio di variabile, ponendo $\begin{cases} x' = x+1 \\ y' = y \end{cases}$ Riscriviamo l'equazione di partenza ponendo $k=1$ e sostituendo $x'-1$ a x e y' a y

$$(x'-1)^2 + (x'-1)y' - 3y'^2 + 2(x'-1) + y' + 1 = \dots =$$

$$= x'^2 + x'y' - 3y'^2 = 0^* \text{ - polinomio omogeneo di } 2^\circ \text{ grado.}$$

Poniamo $t = \frac{x'}{y'}$. Dividendo il polinomio * per y'^2, lo riscriviamo

come $\left(\frac{x'}{y'}\right)^2 + \left(\frac{x'}{y'}\right) - 3 = t^2 + t - 3$. $\rightarrow$ radici reali distinte

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

$$t^2 + t - 3 = (t - t_1)\cdot(t - t_2) = \left(\frac{x'}{y'} - t_1\right)\cdot\left(\frac{x'}{y'} - t_2\right) = 0$$

$\Leftrightarrow (x' - t_1 y_1')\cdot(x' - t_2 y') = 0 \qquad t_1 \neq t_2$

2 rette incidenti.

- Per $k \neq 1$ la conica è non degenere.

$d_1 = 1$

$d_2 = -3 - \frac{k^2}{4} \underset{\neq}{<} 0$ — iperbole

$d_3 \neq 0$

12.1.2.

Stabilire se la relazione R sull'insieme X data goda delle proprietà riflessiva, simmetrica, antisimmetrica e transitiva.

$X = \mathbb{Z}$

(1) $n R m$ se $|n| = |m|$ Riflessiva si. Simmetrica si

Antisimmetrica? (R e' antisimm se nRm e $mRn \Rightarrow m=n$) NO

Transitiva ($nRm \wedge mRk \Rightarrow nRk$) SI

Se $nRm \Rightarrow m=n$ $mRk \Rightarrow m=k$

$m=-n$ $k=-m$ $\Rightarrow k=\pm n \Rightarrow |k|=|n|$ SI

Rifl + Simm + Transit. $\Rightarrow$ Relazione di equivalenza.

(c) nRm se $|n| \lneq |m|$. Riflessiva? NO

Simmetrica? $|2|<|3|$ ma $|3| \not< |2|$ NO

Antisimmetrica? SI $\boxed{nRm \text{ e } mRn} \Rightarrow m=n$ "SI"

↳ e' sempre falsa

Transitiva? SI

(e) nRm se $|n| < m^2$ $\quad |-5| = 5 < (5)^2 = 25$ Riflessiva?

Falso nRn falsa per $n = 0, \pm 1$ $\quad R$ non è riflessiva.

Simmetrica? NO, $n = 1$, $m = 2$

$1 R 2$ $\quad |1| = 1 < 2^2 = 4$, ma $2 \not R 1$

Antisimmetrica? NO $\quad n = 2, m = 3$ $\quad nRm$ e mRn $\quad$ ma $m \neq n$

$|2| = 2 < 3^2 = 9$ $\quad |3| = 3 < 2^2 = 4$

Transitiva. NO. $|n| < m^2$ e $|m| < k^2 \overset{?}{\Rightarrow} |n| < k^2$.

$n = 8, \quad m = 3, \quad k = 2$

$|n| = 8 < 3^2 \quad 8 R 3$

$|3| = 3 < 2^2 \quad 3 R 2$ però $8 \not R 2$ perchè $|8| = 8 \underset{\neq}{>} 2^2 = 4$ R non è transitiva.