Lezione 23-05-19

$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ biregolare

$\exists \ (t, n, b)$ riferimento di Frenet

matrice di rotazione infinitesima

$$(t, n, b)' = (t, n, b) \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

k curvatura

τ torsione

$(t, n, b) \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ortogonale.

$\begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ antisimmetrica

Prop: Se $M : [a,b] \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $M(s)$ e' ortogonale $\forall s \in [a,b]$,

allora $M'(s) = M(s) \cdot A(s)$, dove $A(s) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ antisimmetrica

Dim: ${}^tM(s)\cdot M(s) = I_n \quad \forall s \in [a,b]$ - $M(s)$ è ortogonale $\forall s$.

Derivando $\uparrow$, vediamo che:

$${}^tM'(s)\cdot M(s) + {}^tM(s)\cdot M'(s) = 0$$

Poniamo $A(s) = M^{-1}(s)\cdot M'(s) = {}^tM(s)\cdot M'$

$\Rightarrow M'(s) = M(s)\cdot A(s)$ ok.

Inoltre A è antisimmetrica:

$${}^tA(s) + A(s) = {}^tM'(s)\cdot M(s) + {}^tM(s)\cdot M' = 0 \text{ per}$$

Una matrice di sforzi antisimmetrica applicata a un corpo materiale induce un movimento rigido senza deformazione

• Formule per il calcolo di $\kappa(s)$, $\tau(s)$ e (t, n, b) per α qualsiasi (anche non in parametro d'arco).

$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$.

$$\kappa(s) = \frac{\| \alpha'(s) \wedge \alpha''(s) \|}{\| \alpha'(s) \|^3}$$

$$\tau(s) = \frac{\| \langle \alpha'(s) \wedge \alpha''(s) \mid \alpha'''(s) \rangle \|}{\| \alpha'(s) \wedge \alpha''(s) \|^2}$$

Oss: Se α è piana, poniamo $\beta = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ - curva piana in $\mathbb{R}^3$.

$$K(\beta) = \frac{\|\beta' \wedge \beta''\|}{\|\beta'\|^3} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} \alpha' \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha'' \\ 0 \end{pmatrix} \right\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{\left|\det \boxed{(\alpha', \alpha'')}\right|}{\|\alpha'\|^3} \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

Coerente con la formula ottenuta nel caso di curve piane.

Inoltre è tutto invariante per cambiamenti di parametro

Trovare rif. di Frénet per $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ non nec. in parametro d'arco.

1° modo: applicare la definizione

$$t = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}$$

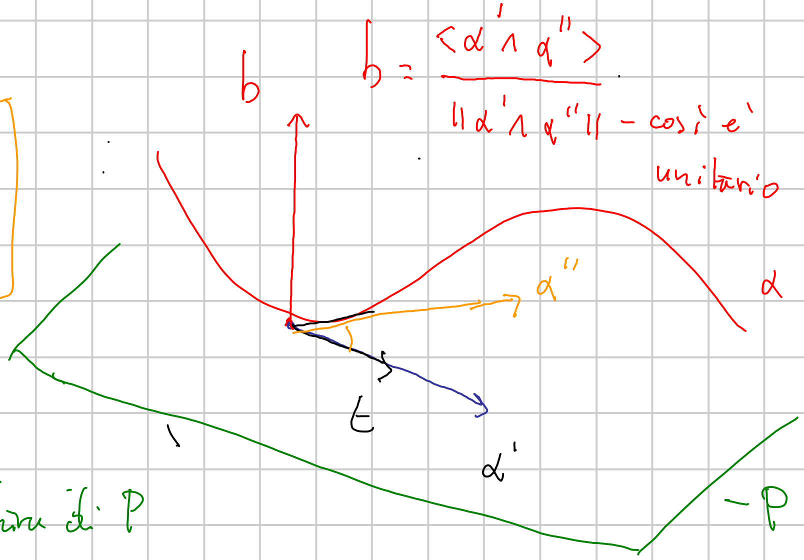
n vettore ottenuto ortonormalizzando (α', α'')

$$n = \frac{\alpha'' - \frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{\|\alpha'\|^2} \cdot \alpha'}{\| \quad " \quad \|}, \quad b = t \wedge n$$

2° modo (migliore)

$$t = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \qquad \boxed{b = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}}$$

$$n = b \wedge t$$



Span (α', α'') è giacitura di P

Integrazione di forme su curve.

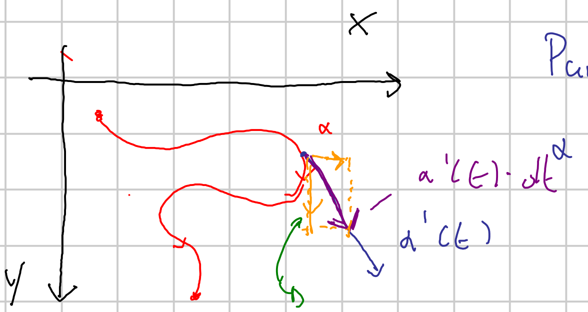
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad \alpha : [a,b] \to \Omega$ regolare.

$(\Omega = \mathbb{R}^n)$

$$\int_\alpha f = \int_a^b \underbrace{f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\|}_{\text{non "vede" la direzione e il verso dello spostamento, ma solo l'intensità.}} \cdot dt$$

- "costo totale per lo spostamento lungo α, dove il costo infinitesimo è pesato da f"

Esempio



Punto materiale che si muove lungo α, soggetto alla forza di gravità.

Vogliamo calcolare il lavoro svolto dalla forza di gravità per piccoli spostamenti del tipo $\boxed{\alpha'(t)\cdot dt}$

Il lavoro infinitesimo è proporzionale a $y'(t)\cdot dt$, dove $\alpha(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

Lavoro tot. compiuto dalla forza di gravità sarà

$$\int_a^b \underbrace{g(\alpha(t))\cdot}_{\text{costo infinitesimo in direzione } y.} \underbrace{y'(t)\cdot dt}_{\text{spostamento infinitesimo in direzione } y}$$

(Componente dell'asse y di $\alpha'(t)\cdot dt$)

Def: Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $g_1, \dots, g_n : \Omega \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue chiamo $\omega = g_1 \cdot dx_1 + \dots + g_n \cdot dx_n$ una 1-forma differenziale su Ω.

Se $\alpha : [a,b] \to \Omega$ è una curva regolare, poniamo

$$\int_\alpha \omega = \int_a^b g_1(\alpha(t)) \cdot x_1'(t) + \dots + g_n(\alpha(t)) \cdot x_n'(t) \cdot dt$$

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad \alpha'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}.$$

Esempio $\Omega = \mathbb{R}^2$.

$$\omega(x,y) = e^{x+3y^2} \cdot dx - \cos(x^2 + 5y) \cdot dy$$

$$\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \quad \alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 + 9t^2 \\ 7t - t^2 \end{pmatrix}$$

$$\int_\alpha \omega = \int_0^1 e^{1+9t^2+3(7t-t^2)^2} \cdot 18t - \cos\left((1+9t^2)^2+5(7t-t^2)\right)\cdot(7-2t)\,dt$$

Prop: Se β è ottenuta da α tramite cambiamento di parametro, vale

$\int_\beta \omega = \int_\alpha \omega$ se α e β hanno la stessa orientazione, mentre $\int_\beta \omega = -\int_\alpha \omega$ se

hanno orientazioni opposte.

Dim:

$$\begin{tikzcd}
{[a,b]} \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{R}^n \\
{[c,d]} \arrow[u, "\tau"] \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

$\beta = \alpha \circ \tau$ (cioè il diagramma commuta)

$$\omega = g \cdot dx + h \cdot dy \qquad \alpha = \begin{pmatrix} X_\alpha \\ Y_\alpha \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} X_\beta \\ Y_\beta \end{pmatrix}$$

$$\int_\beta \omega = \int_c^d g(\beta(s)) \cdot \boxed{X_\beta'(s)} + h(\beta(s)) \cdot Y_\beta'(s) \cdot ds =$$

$$\int_c^d g(\alpha(\tau(s))) \cdot \boxed{X_\alpha'(\tau(s)) \cdot \tau'(s)} + h(\alpha(\tau(s))) \cdot Y_\alpha'(\tau(s)) \cdot \tau'(s) \cdot ds =$$

$$= \operatorname{sign}(\tau') \int_c^d \Big(\underbrace{g(\alpha(\tau(s))) \cdot X_\alpha'(\tau(s)) + h(\alpha(\tau(s))) + Y_\alpha'(\tau(s))}_{\substack{g(\alpha(t)) \cdot X'(t) + h(\alpha(t)) \cdot Y'(t) \\ t = \tau(s)}} \Big) \underbrace{|\tau'(s)| \cdot ds}_{dt} =$$

$= \mathrm{sign}(\tau') \cdot \int_{\alpha} \omega$

Se $U : \Omega \to \mathbb{R}$ è funzione C^1, le associo la 1-forma:

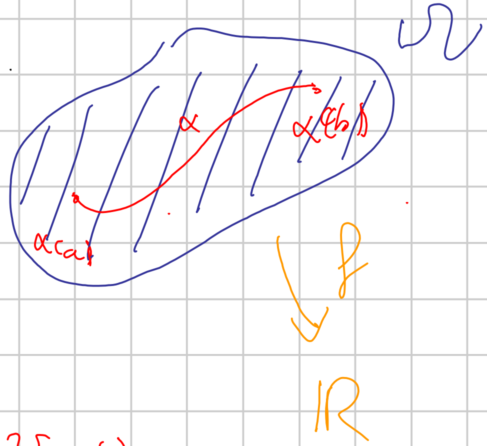
$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial U}{\partial x_n} \cdot dx_n$$ → differenziale di U.

Esempio: $U(x,y) = \cos(x^2 y) - e^x$

$$dU = \underbrace{\left(-2xy \cdot \sin(x^2 y) - e^x\right)}_{\frac{\partial U}{\partial x}} \cdot dx \underbrace{- x^2 \cdot \sin(x^2 y)}_{\frac{\partial U}{\partial y}} \cdot dy$$

Prop: $\int_\alpha dU = U(\alpha(b)) - U(\alpha(a))$ $\quad \alpha : [a,b] \to \Omega$

↳ = differenza dei valori di U agli estremi di α.



Dim: $\int_\alpha dU =$

$$= \int_a^b \frac{\partial U}{\partial x}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}\cdot x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}\cdot y'(t)\cdot dt$$

qui $f(t) = U(\alpha(t))$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\left(U\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}\right)\cdot dt = \int_a^b \frac{df}{dt}\cdot dt = f(b) - f(a)$$

$$\int_\alpha \partial f = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a))$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\left(U(\alpha(t))\right)\cdot dt = U(\alpha(b)) - U(\alpha(a))$$

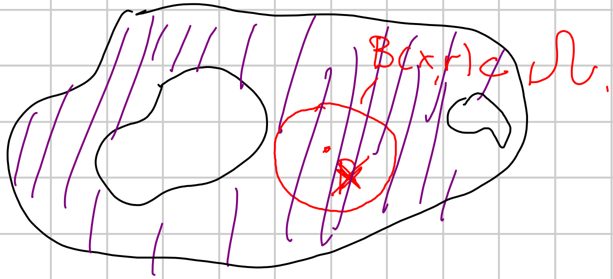
Def: Data $\omega = g \cdot dx + h \cdot dy$ 1-forma, dico che ω è esatta se $\exists\, U : \Omega \to \mathbb{R}$ t.c. $\omega = dU$.

In fisica un campo di forze $\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$ è conservativo se ammette un potenziale U, cioè una funzione U t.c. il lavoro svolto dal campo lungo una traiettoria è uguale alla variazione del potenziale U agli estremi.

$\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$ è conservativo $\Leftrightarrow$ $\omega = g \cdot dx + h \cdot dy$ è una forma esatta.

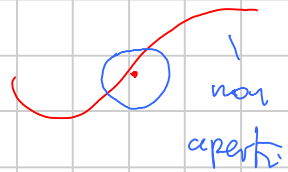
Domanda: come si caratterizzano le forme esatte?

Def: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto se, $\forall x \in \Omega$, $\exists\, r>0$ (dipendente da x) tale che $B(x,r) \subset \Omega$.



Esempi: $\mathbb{R}^2$, $B^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$

Non aperti: $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$, S^1, supporti di curve regolari non sono aperti.



$g, h : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad \Omega$ aperto in $\mathbb{R}^2$.

$\omega = g \cdot dx + h \cdot dy$. $\quad \alpha : [a,b] \to \Omega$

Prop: ω esatta $\Leftrightarrow$ $\forall \alpha : [a,b] \to \Omega$ regolare $\int_\alpha \omega$ dipende solo dagli estremi della curva α.

$\Rightarrow$ Domani