UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 14/2/19 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Se $A \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{C})$ e $p_A(t) = (t+1)^3(t-i)^2$, è possibile che A sia diagonalizzabile? Spiegare.

2. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ e una base di $\mathbb{R}^2$ che la diagonalizza

3. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ unitari e ortogonali a $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

4. Descrivere l'azione su $\mathbb{R}^3$ di una matrice 3×3 ortogonale con determinante -1 e traccia 0.

5. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ determinare il tipo affine della conica di equazione $x^2 - 4xy + ty^2 + 6x + 2y + t + 5 = 0$.

6. Per quali $t \in \mathbb{R}$ la retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che passa per $[2 : t+1 : -3]$ e $[t-3 : -2 : 4]$ contiene $[0 : 9 : -11]$?

7. Calcolare $\int_\alpha (y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)$ con $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 3t \\ 1 - 2t^3 \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2t^2 - t - 2 & 2t^2 - 3t - 4 & 2(t-1) \\ -t^2 + t + 2 & -t^2 + 3t + 3 & 3 - 2t \\ -t^2 + t + 2 & -t^2 + 2t + 1 & 5 - t \end{pmatrix}.$$

(A) (3 punti) Provare che $\det(A) = 4t^3 + 8t^2$.

(B) (2 punti) Sapendo che A ha sempre l'autovalore $\lambda_1 = 4$, trovare gli altri due.

(C) (3 punti) Al variare di t determinare le molteplicità algebriche degli autovalori di A.

(D) (4 punti) Al variare di t determinare le molteplicità geometriche degli autovalori di A, stabilendo se A sia diagonalizzabile o meno.

2. Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \frac{t-1}{t^2+1} \\ t^3 - t^2 + t \end{pmatrix}$ e la sua restrizione β a $[0, 1]$.

(A) (2 punti) Provare che α è semplice e regolare.

(B) (4 punti) Calcolare la curvatura di α nel punto $t = 0$.

(C) (3 punti) Calcolare $\int_\beta x \, \mathrm{d}y$.

(D) (3 punti) Calcolare $\int_\beta \mathrm{e}^{x+y} (\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. $\diamondsuit$

1. Sì, può essere diagonale con diagonale $-1, -1, -1, i, i$

2. $\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = -5,\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. $\frac{\cos(\vartheta)}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sin(\vartheta)}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ con $\vartheta \in \mathbb{R}$

4. Rotazione di angolo $\frac{\pi}{3}$ intorno a una retta e riflessione rispetto al piano ad essa ortogonale

5. Iperbole per $t < 4$ con $t \neq -3$; due rette per $t = -3$; parabola per $t = 4$; ellisse per $4 < t < 11$; un punto per $t = 11$; vuota per $t > 11$

6. $t = 4$ e $t = \frac{5}{11}$

7. $-\frac{23}{5}$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni degli esercizî

5. ♢

1.

(A) Eseguendo le seguenti operazioni

- sostituire la seconda colonna con sé stessa meno la prima
- sostituire la prima riga con sé stessa più due volte la seconda
- sostituire la terza riga con sé stessa meno la seconda
- sostituire la seconda colonna con sé stessa più la terza

si ottiene subito $4(t+2)((t+2)-(-t^2+t+2)) = 4t^2(t+2) = 4t^3+8t^2$

(B) $\lambda_2 = t^2,\ \lambda_3 = t+2$

(C) Per $t=-2$ autovalore 0 con molteplicità algebrica 1 e autovalore 4 con molteplicità algebrica 2
Per $t=-1$ autovalore 4 con molteplicità algebrica 1 e autovalore 1 con molteplicità algebrica 2
Per $t=2$ autovalore 4 con molteplicità algebrica 3
Altrimenti autovalori $4,\ t^2,\ t+2$ con molteplicità algebrica 1

(D) Per $t=-2$ autovalore 0 con molteplicità geometrica 1 e autovalore 4 con molteplicità geometrica 1; non diagonalizzabile
Per $t=-1$ autovalore 4 con molteplicità geometrica 1 e autovalore 1 con molteplicità geometrica 1; non diagonalizzabile
Per $t=2$ autovalore 4 con molteplicità geometrica 2; non diagonalizzabile
Altrimenti autovalori $4,\ t^2,\ t+2$ con molteplicità geometrica 1; diagonalizzabile

2.

(A) La derivata della seconda componente di α è sempre positiva.

(B) $-\sqrt{2}$

(C) $\pi - \frac{7}{2}$

(D) $\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}$

---

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$
