



Quesito 1. Trovare gli autovalori di $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$
sapendo che $\text{tr}(A) = 5$, che $\det(A) = -7$ e che $p_A(2) = -11$.



Quesito 2. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ sia diagonalizzabile la matrice

$$\begin{pmatrix} k^2 + k - 10 & 3 - k \\ k^2 - 9 & 2 \end{pmatrix}.$$



Quesito 3. Trovare tutti i vettori di \mathbb{R}^3 unitari, con somma delle componenti nulla e ortogonali a $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.



Quesito 4. Descrivere l'azione di una $M \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ ortogonale tale che $\text{tr}(M) = \sqrt{3} - 1$ e $\det(M) = -1$.



Quesito 5. Nello spazio \mathbb{R}^3 considerare un piano affine P e una retta affine ℓ , e i loro completamenti proiettivi \widehat{P} e $\widehat{\ell}$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. A seconda della posizione reciproca di P e ℓ dire quanti sono i punti all'infinito di $\widehat{P} \cap \widehat{\ell}$.



Quesito 6. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione

$$2x^2 - 4xy + 6xz + 6x + 5y^2 + 4yz - 6y + 13z^2 + 10z = 0.$$

Spiegare.



Quesito 7. Trovare gli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$
e una base ortonormale di \mathbb{R}^2 che la diagonalizza.



Quesito 8. Per la funzione

$$f(x, y) = (5x - 4y + 1) \cos(2x - 3y)$$

determinare la matrice hessiana nel punto $(0, 0)$ e i segni dei suoi autovalori.



Quesito 9. Per la curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \cdot \cos(t) \\ \sin(t) \\ t + t^2 + t^3 \end{pmatrix}$$

calcolare curvatura e torsione nel punto $t = 0$.



Quesito 10. Stabilire per quali $k, h \in \mathbb{R}$ si ha

$$\int_{\alpha} x^2 y (y(ky^3 - 4x) dx + x(5y^3 + hx) dy) = 0$$

per ogni curva chiusa $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$.



Risposte ai quesiti

1. $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{11}$
2. $k \neq -2$
3. $\pm \frac{1}{\sqrt{114}} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$
4. Rotazione di angolo $\frac{\pi}{6}$ intorno a una retta ℓ composta con la riflessione rispetto al piano ℓ^\perp
5. Uno se ℓ è parallela a P (compreso il caso $\ell \subset P$), nessuno se ℓ è incidente a P
6. Ellissoide
7. $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -8, v_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$; uno negativo e uno nullo
9. $\kappa = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}; \tau = -\frac{1}{2}$
10. $k = 3, h = -2$