UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

Modulo di "Geometria" — Scritto del 10/1/23 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Stabilire per quali $k \in \mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} -ik & -k^2-ik \\ -1+ik & k^2-1+ik \end{pmatrix}$ risulta diagonalizzabile.

2. Data $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$, sapendo che il suo polinomio caratteristico $p_A(t)$ si annulla per $t=-7$, per $t=\sqrt{3}$ e per $t=11$, si può concludere che A è diagonalizzabile oppure che non lo è? Spiegare.

3. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{C}^2$ unitari, con somma delle componenti reale e ortogonali a $\begin{pmatrix} 1-i \\ i \end{pmatrix}$.

4. Esibire la matrice della riflessione di $\mathbb{R}^2$ rispetto alla retta di equazione $y=2x$.

5. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la conica di equazione $(1+4k)x^2+6kxy+4y^2+2x+\frac{4}{3}y=0$ sia una parabola.

6. Trovare i punti all'infinito del luogo di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $\begin{cases} 2x^3-x^2y-yz^2+\sqrt{\pi}x^2+7z=3 \\ x-2y+z=0. \end{cases}$

7. Calcolare $\int_\alpha \left(y+\ln\left(1+\mathrm{e}^{x^2}\right)\right)\,\mathrm{d}x$ con $\alpha:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ data da $\alpha(\vartheta)=\begin{pmatrix}\cos(\vartheta)\\ \sin(\vartheta)\end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♠ 3. ♢ 4. ♣ 5. ♠ 6. ♢ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♢ 10. ♣

Modulo di "Geometria" — Scritto del 10/1/23 — Esercizî

1. Considerare in $\mathbb{R}^3$ il piano $P = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$.

Definire inoltre per ogni $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 3-2k & 1-k & 0 \\ 13k-6 & 3k-2 & k \\ 7(k^2+2k-3) & 7(k-1) & k^2 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Esibire la matrice M della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ su P.

(B) (2 punti) Provare che $\det(A_k) = k^3$.

(C) (2 punti) Sapendo che A_k ha sempre l'autovalore k^2, trovare gli altri.

(D) (4 punti) Al variare di k trovare la molteplicità algebrica e geometrica degli autovalori di A_k e discuterne la diagonalizzabilità.

(E) (2 punti) Provare che $M + A_k$ ha sempre l'autovalore 2. (*Suggerimenti:* **non** scrivere la matrice $M + A_k$; notare che $2 = 1 + 1$.)

2. Considerare la curva $\alpha : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ data da $\alpha(s) = \begin{pmatrix} s + \cos(2s) \\ s^3 - s^2 + 3s \\ \log(1+s) \end{pmatrix}$

(A) (1 punto) Provare che α è regolare e semplice.

(B) (3 punti) Determinare il riferimento di Frénet di α nel punto $\alpha(0)$.

(C) (4 punti) Calcolare curvatura e torsione di α nel punto $\alpha(0)$.

(D) (4 punti) Calcolare $\int_\beta y \, \mathrm{d}z$ dove β è la restrizione di α a $[0, 1]$.

1. ♡ 2. ♠ 3. ♢ 4. ♣ 5. ♠ 6. ♢ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♢ 10. ♣

Risposte ai quesiti

3. ♢

1. $k \neq i$

2. Non si può concludere nulla:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

soddisfano le ipotesi, ma A_1 è diagonal(izzabil)e mentre A_2 non lo è

3. $\pm\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} 2+i \\ 3-i \end{pmatrix}$

4. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

5. $k = -\frac{2}{9}$

6. Il solo punto $[1:1:1]$

7. $-\pi$

1. ♡ 2. ♠ 3. ♢ 4. ♣ 5. ♠ 6. ♢ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♢ 10. ♣

Soluzioni degli esercizî

3. ♢

1.

(A) $\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 6 & 10 & 2 \\ -3 & 2 & 13 \end{pmatrix}$

(B) Sostituendo la terza riga con sé stessa meno 7 volte la prima e poi la prima colonna con sé stessa meno 7 volte la terza si conclude con facili calcoli

(C) 1 e k

(D)
- Per $k \neq -1$, $k \neq 0$ e $k \neq 1$ autovalori 1, k e k^2 con molteplicità algebrica e geometrica 1: diagonalizzabile
- Per $k = -1$ autovalore -1 con molteplicità algebrica e geometrica 1 e autovalore 1 con molteplicità algebrica 2 e geometrica 1: non diagonalizzabile
- Per $k = 0$ autovalore 1 con molteplicità algebrica e geometrica 1 e autovalore 0 con molteplicità algebrica e geometrica 2: diagonalizzabile
- Per $k = 1$ autovalore 1 con molteplicità algebrica 3 e geometrica 2: non diagonalizzabile

(E) Un autovettore di A_k relativo all'autovalore 1 è $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ ed appartiene a P, dunque $A_k \cdot w = M \cdot w = w$, da cui $(M + A_k) \cdot w = 2w$

2.

(A) La seconda componente di α' è sempre positiva

(B) $t = \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $n = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \frac{1}{\sqrt{110}}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$

(C) $\kappa = \frac{\sqrt{10}}{11}$, $\tau = \frac{1}{55}$

(D) $\frac{13}{3} - 5\log(2)$