UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

IN SUPREMÆ DIGNITATIS · 1343 ·

Modulo di "Geometria" — Scritto del 19/7/22 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ è diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} k^2-k-9 & k+4 \\ k^2-16 & 11 \end{pmatrix}$.

2. Data $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ determinare il suo polinomio caratteristico $p_A(t)$ sapendo che $\mathrm{tr}(A) = -3$, $\det(A) = -5$ e $p_A(2) = 9$. (Attenzione: $p_A(t) = t^3 + \ldots$)

3. Provare che l'applicazione bilineare su $\mathbb{R}^2$ associata alla matrice $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ è un prodotto scalare e stabilire l'angolo formato dai vettori della base canonica rispetto a tale prodotto scalare.

4. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori della matrice

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & t^2-1 & 1 \\ t+5 & \cos(t) & t^2-2 \\ 1 & 2t+1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Determinare il tipo affine della quadrica $10x^2 + 8xz - 14x + y^2 + 4yz + 6z^2 - 6z + 4 = 0$.

6. Esibire oppure provare che non esistono due sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^6(\mathbb{R})$ entrambi aventi dimensione 3 e che si incontrano esattamente in un punto.

7. Calcolare $\int_\alpha xy \cdot \sin(x^2y^2) \cdot (y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)$ dove $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ è la curva data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \ln(1+t) \\ \cos(\pi \cdot t) \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♠ 3. ♢ 4. ♣ 5. ♠ 6. ♢ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♢ 10. ♣

Modulo di “Geometria” — Scritto del 19/7/22 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^3$ considerare i sottospazi

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \qquad W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

(A) (5 punti) Esibire le matrici M e N delle proiezioni ortogonali su U e W rispettivamente.

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ porre ora $A = 6k \cdot M + 14 \cdot N$.

(B) (2 punti) Provare che A è diagonalizzabile per ogni k.

(C) (3 punti) Provare che A ha sempre l'autovalore $6k+14$. [Suggerimento: non calcolare il polinomio caratteristico.]

(D) (2 punti) Per $k = 1$ trovare gli altri autovalori di A.

2. Giustificare informalmente il seguente fatto generale (non è richiesta una dimostrazione formale):

(A) (2 punti) Se $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ è una curva semplice e regolare, se $\ell \subset \mathbb{R}^2$ è una retta (affine), se $t_0 \in (a, b)$ e $\alpha(t_0)$ non appartiene a ℓ ma è il punto dell'immagine di α più vicino a ℓ, allora la tangente ad α in $\alpha(t_0)$ è parallela a ℓ.

Considerare ora la curva orientata $\alpha : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^2 - t - 1 \\ t - \ln(t) \end{pmatrix}$, che è semplice (ma non è richiesto di dimostrarlo).

(B) (2 punti) Provare che α è regolare.

(C) (2 punti) Calcolare la curvatura di α in $\alpha(2)$.

(D) (2 punti) Calcolare per ogni t il segno della curvatura di α in $\alpha(t)$.

(E) (2 punti) Stabilire per quali t la tangente ad α in $\alpha(t)$ è parallela alla retta ℓ di equazione $6x - 91y + 2 = 0$.

(E) (2 punti) Sapendo che l'immagine di α è disgiunta da ℓ (non è richiesto di dimostrarlo), trovare il suo punto più vicino a ℓ.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

1. $\heartsuit$ 2. $\spadesuit$ 3. $\diamondsuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\spadesuit$ 6. $\diamondsuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\diamondsuit$ 10. $\clubsuit$

Risposte ai quesiti

3. $\diamondsuit$

1. $k \neq 3$

2. $t^3 + 3t^2 - 8t + 5$

3. $d_1 = 3 > 0,\ d_2 = 11 > 0;\ \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{15}}\right)$

4. $t = 3$

5. Ellissoide

6. Definiti in $\mathbb{R}^7$ i sottospazi vettoriali $U = \mathrm{Span}(e_1, e_2, e_3, e_4)$ e $W = \mathrm{Span}(e_4, e_5, e_6, e_7)$ basta prendere le immagini in $\mathbb{P}^6(\mathbb{R})$ di $U \setminus \{0\}$ e $W \setminus \{0\}$

7. $-\frac{1}{2}\left(\cos\left(\ln^2(2)\right) - 1\right)$

1. $\heartsuit$ 2. $\spadesuit$ 3. $\diamondsuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\spadesuit$ 6. $\diamondsuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\diamondsuit$ 10. $\clubsuit$

Soluzioni degli esercizî

3. $\diamondsuit$

1.

(A) $M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; $N = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 6 & 10 & 2 \\ -3 & 2 & 13 \end{pmatrix}$

(B) È sempre simmetrica

(C) Se v genera $U \cap W$ si ha $M \cdot v = N \cdot v = v$, dunque $A \cdot v = (6k + 14) \cdot v$

(D) $10 \pm \sqrt{65}$

2.

(A) *Giustificazione informale*: se la retta tangente r ad α in $\alpha(t_0)$ non è parallela a ℓ, allora i punti di r da una delle due parti rispetto ad $\alpha(t_0)$ sono più vicini a ℓ rispetto ad $\alpha(t_0)$. Ma α è approssimata al primo ordine da r vicino ad $\alpha(t_0)$, dunque lo stesso succede per α, il che contraddice il fatto che $\alpha(t_0)$ sia il punto dell'immagine di α più vicino a ℓ. *Dimostrazione formale*: se $\alpha = (X, Y)$ e ℓ ha equazione $px+qy+c = 0$ con $p^2+q^2 = 1$ allora la distanza al quadrato $(pX(t)+qY(t)+c)^2$ di $\alpha(t)$ da ℓ ha un minimo in t_0, dunque si annulla la derivata $2(pX(t_0)+qX(t_0)+c)(pX'(t_0)+qY'(t_0))$, ma $pX(t_0)+qX(t_0)+c \neq 0$ poiché $\alpha(t_0)$ non appartiene a ℓ, dunque $pX'(t_0)+qY'(t_0) = 0$; resta provato che la giacitura $\alpha'(t_0) = (X'(t_0), Y'(t_0))$ della retta tangente r ad α in $\alpha(t_0)$ soddisfa la parte omogenea dell'equazione di ℓ, pertanto r è parallela a ℓ ora

(B) $X'(t)$ si annulla solo per $t = \frac{1}{2}$ ma $Y'(\frac{1}{2}) = -1$

(C) $\kappa(2) = -\frac{2}{37\sqrt{37}}$

(D) Positiva su $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, nulla agli estremi, negativa fuori

(E) $t = 7$ e $t = \frac{13}{12}$

(F) $\alpha\left(\frac{13}{12}\right)$

1. $\heartsuit$ 2. $\spadesuit$ 3. $\diamondsuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\spadesuit$ 6. $\diamondsuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\diamondsuit$ 10. $\clubsuit$