Ist. Mat. I - C1A

Ogni $x \in \mathbb{Q}$ ha scrittura decimale periodica.

$x \in \mathbb{Z}$ $\qquad x = 753$

$x < 10$ ok è la sua scrittura decimale

$x \geq 10$ divido $x : 10$ $\qquad x = q \cdot 10 + r \qquad 0 \leq r < 10$

$\Rightarrow x = \ldots r$; continuo con q per trovare cifre precedenti.

$753 = 10 \cdot 75 + 3 \qquad 753 = \ldots 3$

$x \in \mathbb{Q} \qquad x = \frac{n}{m} \qquad \frac{87}{21}$

divido $n : m$

$n = m \cdot q + r \qquad 87 = 21 \cdot 4 + 3$

$\frac{n}{m} = q + \frac{r}{m} = q, \ldots \qquad \frac{87}{21} = 4, \ldots$

divido $10r : m$

$10r = m \cdot q_1 + r_1 \qquad 30 = 21 \cdot 1 + 9$

$\frac{n}{m} = q, q_1 \ldots \qquad \frac{87}{21} = 4,1 \ldots$

divido $10 r_1 : m \qquad 90 = 4 \cdot 21 + 6$

$10 r_1 = m \cdot q_2 + r_2$

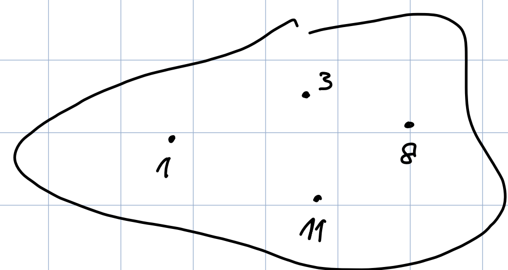
$\frac{n}{m} = q, q_1 q_2$ $\qquad$ $\frac{87}{21} = 4,14\ldots$

Tutti i resti successivi $r, r_1, r_2, \ldots$ sono compresi tra 0 e $m-1$ $\Longrightarrow$ c'è una ripetizione: da quando ritrovo un resto già trovato la scrittura si ripete $\Longrightarrow$ <u>periodico</u>.

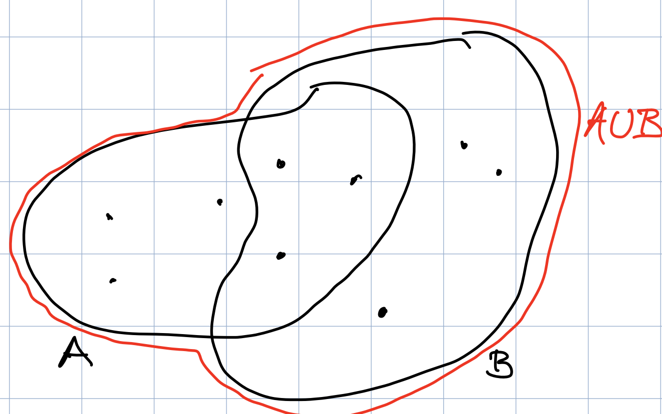
——— o ———

Diagrammi di insiemi:

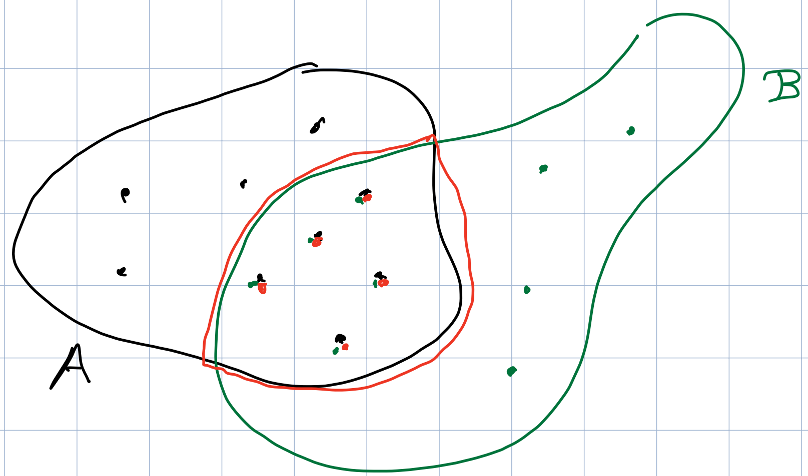
$\{1, 3, 8, 19\} =$



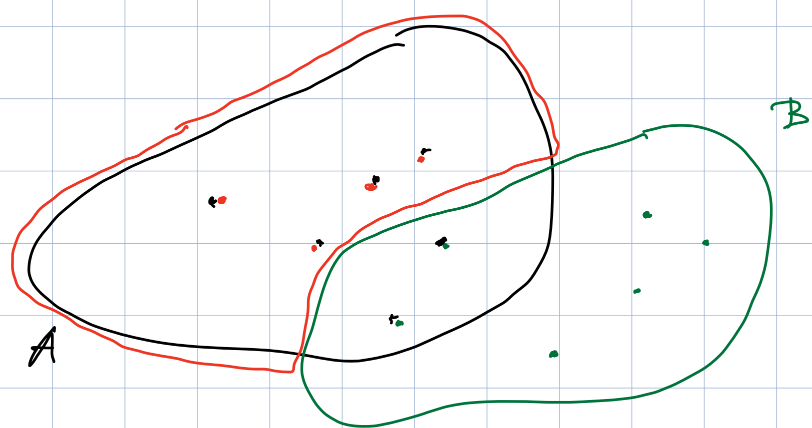
unione $\quad A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$



intersezione $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$



differenza $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$



prodotto cartesiano $A \times B = \{(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$

<u>Es</u>: $A = \{1, 3, 8\}$ $B = \{2, 3\}$

$A \times B = \{(1,2), (1,3), (3,2), (3,3), (8,2), (8,3)\}$

Connettivi logici e , o = oppure , non.

Proposizione = affermazione con uno o più soggetti e un predicato che può essere vero o falso.

Es: 5 è dispari vera
6 è multiplo di 5 falsa
io e Isabella siamo più alti di 180 cm falsa

date proposizioni P, Q

P e Q vera se sono vere sia P sia Q
P o Q vera se è vera almeno una delle due
6 pari o 5 pari è vera
6 pari o 14 pari è vera
non (P) vera se P è falsa

$\Rightarrow$ implicazione (poco interessante per proposizioni)

Predicato: affermazione con uno o più soggetti variabili in un insieme che per ogni valore del soggetto è vero o falso.

Es: $P(n) =$ "n è pari" $\quad n \in \mathbb{N}$

$P(6)$ vera $\qquad P(51)$ falsa

Implicazione logica: dati due predicati $P(x)$, $Q(x)$ con lo stesso soggetto creo una nuova proposizione

$$P(x) \Rightarrow Q(x)$$

che è vera se $Q(x)$ è vera per ogni x t.c. $P(x)$ è vera.

Cioè è l'affermazione:

se $P(x)$ è vera allora $Q(x)$ è vera.

Esempio: $P(n) =$ n è la quarta potenza di un numero intero $\quad n \in \mathbb{N}$

$Q(n) =$ n è il quadrato di un numero intero $\quad n \in \mathbb{N}$

$P(n) \Rightarrow Q(n)$ vera:

dimostrazione: se $P(n)$ è vera ho $n = m^4$ con m intero $\Rightarrow n = (m^2)^2$
m^2 è intero; dunque vale $Q(n)$

$Q(n) \Rightarrow P(n)$ falsa:

dimostrazione: devo esibire n che rende vera $Q(n)$ ma non $P(n)$: prendo $n=4$

$Q(n)$ vera $4=2^2$

$P(n)$ falsa: non esiste un intero la cui quarta potenza sia 4

---

dimostrazione = argomentazione che conduce a provare la verità (o falsità) di una proposizione o predicato.

Metodo diretto. Es: $\sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall \alpha \in \mathbb{Q}, \alpha \neq 1.$

Prop: $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$

Ad esempio $n=5$ $\underbrace{0+1+2+3+4+5}_{15} = \underbrace{\frac{5(5+1)}{2}}_{15}$

ok

Dimostrazione:

$$2. \quad \sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

$$+ \; n + n-1 + n-2 + n-3 + \dots + 1 + 0$$

$$= \underbrace{n + n + n + n \qquad + n + n}_{n+1}$$

$$= n \cdot (n+1) \implies \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad \blacksquare$$

Prop: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\left(n = 5 \qquad 55 = \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} \right)$

Principio di induzione:

Per dimostrare che un predicato $P(n)$ relativo a $n \in \mathbb{N}$ è sempre vero (vero $\forall n \in \mathbb{N}$) basta:

- passo base: verificare che $P(0)$ è vera
- passo induttivo: verificare che per ogni n generico

  se $\underbrace{P(n) \text{ è vera}}_{\text{ipotesi induttiva}}$ allora $\underbrace{P(n+1) \text{ è vera}}_{\text{tesi induttiva}}$

Perché? $P(0)$ vera (passo base)

$P(1)$: uso il passo induttivo con $n=0$

dice che "se $\underbrace{P(0) \text{ è vera}}_{\text{vera per passo base}}$ allora $P(1)$ vera"

$\Longrightarrow P(1)$ vera

$P(2)$: uso il passo base con $n=1$

"se $\underbrace{P(1) \text{ è vera}}_{\text{vera (già visto)}}$ allora $P(2)$ è vera"

$\Longrightarrow P(2)$ vera

Prop: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Dim per induzione su n.

Passo base $n=0$ $\qquad \displaystyle\sum_{k=0}^{0} k = \frac{0\cdot(0+1)}{2}$ $\quad$ vera

Passo induttivo: suppongo $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\quad$ ipotesi induttiva

devo dimostrare che $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ $\quad$ tesi induttiva

Calcolo infatti $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1)$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad \blacksquare$$

Esercizio: provare per induzione $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Per assurdo: per provare una certa proposizione si suppone che sia falsa e si deduce una contraddizione a...

- o un fatto noto e sicuro
- l'ipotesi se c'è.

Prop: non esiste alcun $x \in \mathbb{Q}$ t.c. $x^2 = 2$.

Dim: per assurdo suppongo che esiste $x \in \mathbb{Q}$ t.c. $x^2 = 2$. So che posso scrivere $x = \frac{n}{m}$ come frazione ridotta, cioè n, m senza fattori primi tra loro. Dunque

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2 \implies n^2 = 2m^2.$$

Oss generale: se $q \in \mathbb{N}$ è dispari allora q^2 è dispari ovvero se q^2 è pari allora q è pari

Scoperto: n^2 è pari dunque n è pari;

$n = 2k \quad k \in \mathbb{N}$; $\quad (2k)^2 = 2m^2$

$\implies 4k^2 = 2m^2 \implies m^2 = 2k^2$

$\implies m$ è pari. Assurdo. $\blacksquare$

Prop: se $n, m \in \mathbb{N}$, $n^2 + m^2$ è un quadrato perfetto allora almeno uno tra n, m è pari.

3,4,5   5,12,13   7,24,25

<u>Dimostrazione</u>: supponiamo per assurdo n, m dispari.

Cioè $n = 2k+1 \quad m = 2h+1 \quad k, h \in \mathbb{N}$

$$n^2 + m^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4h^2 + 4h + 1$$
$$= 4(k^2 + k + h^2 + h) + 2$$

pertanto la divisione $(n^2 + m^2) : 4$ ha resto 2.

Verifichiamo che un quadrato perfetto p non può avere resto 2 se diviso per 4:

$p = q^2$ → q pari $\quad q = 2a \quad p = q^2 = 4a^2$ resto 0

$p = q^2$ → q dispari $\quad q = 2a+1 \quad p = q^2 = 4(a^2 + a) + 1$ resto 1.

Assurdo. ▨

——— o ———

<u>Funzione</u>: $\quad f : X \to Y$

dove X, Y sono insiemi e f è una legge che ad ogni elemento $x \in X$ associa un elemento $f(x)$ di Y.

X: dominio

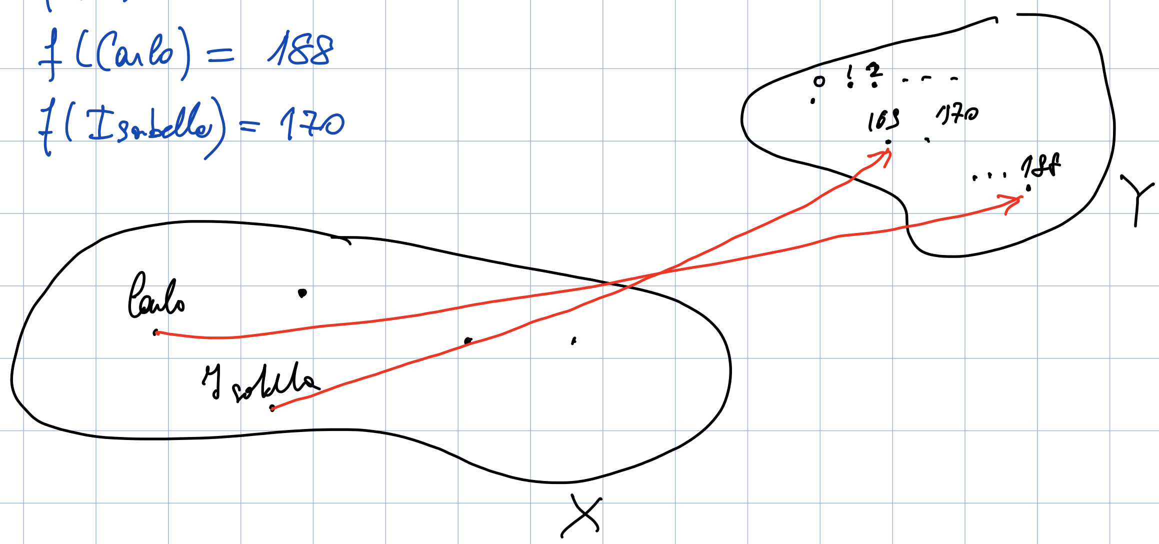
Y: codominio

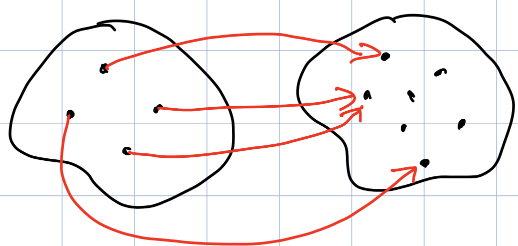
$f(x)$ valore di f in x

$$x \longmapsto f(x)$$

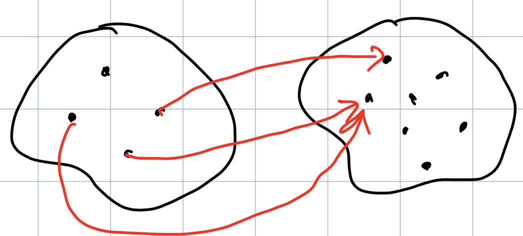
Esempio: $X = \{$ noi qui oggi in G21 DCU $\}$
$Y = \mathbb{N}$

$f(x) =$ altezza di x in cm
$f(\text{Carlo}) = 188$
$f(\text{Isabella}) = 170$

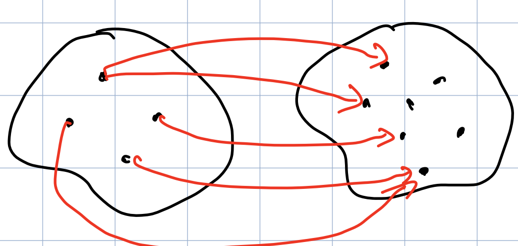




ok



NO



NO

$f(x) = 7x^2-3$ Non è una funzione se non specifico dominio e codominio

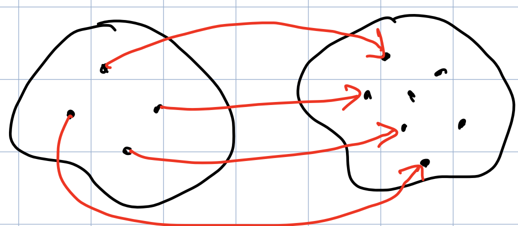
$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ $f(x) = 7x^2-3$

$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ $f(x) = 7x^2-3$

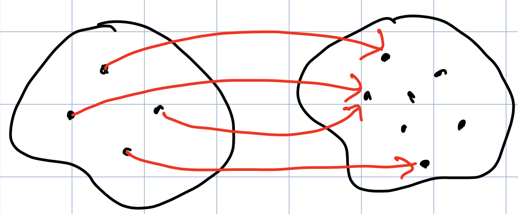
sono funzioni ma diverse fra loro.

Def: $f: X \to Y$ si dice

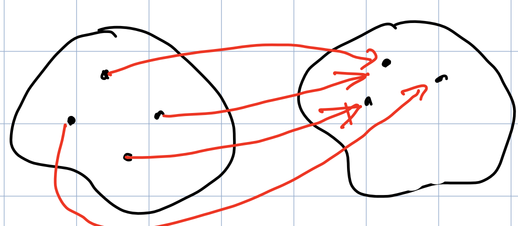
- iniettiva se per $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$
- surgettiva se $\forall y \in Y \ \exists x \in X$ t.c. $f(x) = y$.
- bigettiva se iniettiva e surgettiva.



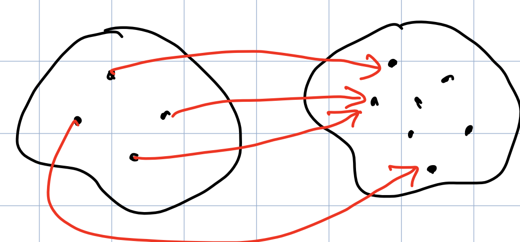
iniettiva



non iniettiva



surgettiva



non surgettiva