29/9/2022 lorenzo.venturello@unipi.it

Es 5

a) SE n DISPARI ALLORA n^2 DISPARI

n DISPARI $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k+1$

$$\Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = \underbrace{4k^2 + 4k}_{} + 1 = 2\overbrace{(2k^2+2k)}^{k' \in \mathbb{N}} + 1$$

$$\Rightarrow n^2 = 2(k')^2 + 1 \Rightarrow n^2 \text{ DISPARI} \qquad \square$$

b) SE $n \geq 4$ ALLORA $n! > 2^n$

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$$

"n FATTORIALE"

$2! = 2$ ✗

$3! = 6$ ✗

$4! = 24 > 2^4 = 16$ ✓

$$n \geq 4 \Rightarrow n! = \underbrace{n \cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}_{n \text{ NUMERI}} = n\,(n-1)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

$$\begin{array}{cccccc} n & (n-1) & \cdots & 4 & 3 & 2 \\ \vee & \vee & \vee & \text{IV} & \vee & \text{IV} \\ 2 & 2 & 2 & 2^2 & 2 & 2 \end{array}$$

$$> \underbrace{2\cdot 2\cdots 2}_{n-2 \text{ VOLTE}} \cdot \underbrace{2^2}_{1 \text{ VOLTA}} = 2^{n-2}\cdot 2^2 = 2^n \qquad \square$$

c) SE n^2 DISPARI ALLORA n DISPARI. (PER ASSURDO)

ASSUMIAMO LA NEGAZIONE DELLA TESI.

ASSUMIAMO n PARI $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k$

$$\Rightarrow n^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = 2(2k^2) = 2k'$$

CON $k' \in \mathbb{N}$. $(k' = 2k^2)$

$\Rightarrow n^2$ PARI. QUESTO CONTRADDICE L'IPOTESI

d) SE $n, m \in \mathbb{N}$ E n^2+m^2 PARI ALLORA $n+m$ PARI. (PER ASSURDO) $\square$

$$n^2+m^2 \neq (n+m)^2$$

ASSUMIAMO LA NEGAZIONE DELLA TESI.

// $n+m$ DISPARI $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n+m = 2k+1$

$$\Rightarrow (n+m)^2 = (2k+1)^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{n^2+m^2}+2mn = 4k^2+4k+1$$

$$\Rightarrow n^2+m^2 = 4k^2+4k-2mn+1$$

$$\Rightarrow n^2+m^2 = 2(2k^2+2k-mn)+1$$

$\Rightarrow$ SE $t = 2k^2+2k-mn$ ALLORA

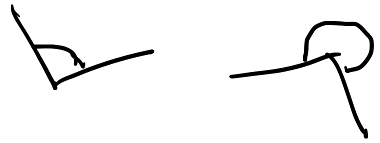
$$n^2+m^2 = 2t+1$$

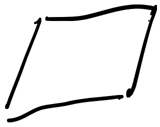
$\Rightarrow n^2+m^2$ DISPARI. CONTRADDICE L'IPOTESI. $\square$

e) SE UN QUADRILATERO HA DUE ANGOLI RETTI ALLORA GLI ALTRI DUE SONO CONVESSI.

- ANGOLO RETTO 90°
- ANGOLO CONVESSO $< 180^\circ$

SI NO





TUTTI CONVESSI

UN ANGOLO CONCAVO

- LA SOMMA DEGLI ANGOLI (INTERNI) DI UN QUADRILATERO È 360°

ASSUMIAMO LA NEGAZIONE DELLA TESI.

ASSUMIAMO ESISTA ALMENO UN ANGOLO CONCAVO α_1

SIANO α_2 E α_3 GLI ANGOLI RETTI

CONSIDERO

$$\underset{\underset{180^\circ}{\vee}}{\alpha_1} + \underset{\underset{90^\circ}{\parallel}}{\alpha_2} + \underset{\underset{90^\circ}{\parallel}}{\alpha_3} + \underset{\underset{0^\circ}{\vee}}{\alpha_4} > 180^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ$$

MA $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 360$ (ANGOLI INTERNI DI QUADRILATERO) $\square$

f) SE $n \in \mathbb{N}$ ALLORA $\underbrace{9^{n+1} + 2^{6n+1}}_{f(n)}$ È DIVISIBILE PER 11.

(INDUZIONE)

PASSO BASE $n = 0$. $\overset{f(0)}{9^{0+1}} + 2^{6 \cdot 0+1} = 9 + 2 = 11$ ✓

PASSO INDUTTIVO. ASSUMO CHE $9^{n+1} + 2^{6n+1}$ SIA DIVISIBILE PER 11 PER UN VALORE n.

$$f(n+1) = 9^{(n+1)+1} + 2^{6(n+1)+1} = 9^{n+2} + 2^{6n+7}$$

$$f(n+1) = 9^{n+2} + 2^{6n+7} = 9 \cdot 9^{n+1} + \overset{64}{\overset{\parallel}{2^6}} \cdot 2^{6n+1}$$

$$= 9 \cdot 9^{n+1} + 9 \cdot 2^{6n+1} + 55 \cdot 2^{6n+1}$$

$$= 9\left(9^{n+1} + 2^{6n+1}\right) + 55 \cdot 2^{6n+1}$$

$\overset{\text{PER HP INDUTTIVA}}{\Longrightarrow} \exists K \in \mathbb{N} : 9^{n+1} + 2^{6n+1} = 11K$

$$f(n+1) = 9 \cdot 11 \cdot K + 55 \cdot 2^{6n+1}$$
$$= 11\left(9K + 5 \cdot 2^{6n+1}\right)$$

$\Rightarrow f(n+1)$ È DIVISIBILE PER $\underline{11}$. $\square$

9) SE X HA n ELEMENTI ALLORA $\mathcal{P}(X)$ HA 2^n ELEMENTI

PASSO BASE: $n=0$ $\quad X = \emptyset \quad \mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$

$|X| = 0 \qquad |\mathcal{P}(X)| = 1 = 2^0$

PASSO INDUTTIVO. ASSUMIAMO $(|X| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(X)| = 2^n)$

PER OGNI INSIEME X

CONSIDERIAMO UN INSIEME X CON $|X| = n+1$

SIA $x \in X$.

$$\mathcal{P}(X) = \underbrace{\{Y \subseteq X : x \in Y\}}_{A} \cup \underbrace{\{Y \subseteq X : x \notin Y\}}_{B}$$

$$|\mathcal{P}(X)| = |A| + |B|$$

$$B = \mathcal{P}(\overbrace{X \setminus \{x\}}^{n \text{ ELEMENTI}}) \overset{\text{PER HP}}{\Longrightarrow} |B| = 2^n$$

$$A = \{ Y \cup \{x\} : Y \in \mathcal{P}(X \setminus \{x\}) \}$$

$$|A| = |\mathcal{P}(X \setminus \{x\})| \overset{\text{PER HP}}{=} 2^n$$

$$|\mathcal{P}(X)| = |A| + |B| = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

$\square$