Ist. Mat. I - CIA
20/10/22

Date (a_n), (b_n) con lim. $\pm\infty$ si possono confrontare:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

- $\to \pm\infty$ — (a_n) è ∞ di ordine <u>superiore</u> a (b_n)
- $\to L \in \mathbb{R}$ — (a_n), (b_n) <u>stesso ordine</u>
- $\to 0$ — (a_n) è ∞ di ordine <u>inferiore</u> a (b_n)

(può anche non esistere)

Analog. se (a_n), (b_n) sono infinitesime ($\lim = 0$)

$$\lim \left|\frac{a_n}{b_n}\right|$$

- $\to 0$ — (a_n) è infinitesimo di ordine superiore a (b_n)
- $\to L$ — ... stesso ...
- $\to +\infty$ — ... inferiore ...

(può non esistere)

Confronti fondamentali: $a > 1$, $\alpha > 0$

$\log_a(n)$ ∞ inferiore a n^α ∞ inferiore a a^n $\boxed{\infty \text{ inferiore a } n!}$

Prop: data (a_n) con $a_n > 0$ $\forall n$ se esiste

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

- se $L < 1$ $\lim(a_n) = 0$
- se $L > 1$ (anche $+\infty$) $\lim(a_n) = +\infty$

(nessuna conclusione per $L = 1$)

Dimo: se $L < 1$; scelgo $\varepsilon > 0$ t.c. $L + \varepsilon < 1$;

$\exists N$ t.c. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - L\right| < \varepsilon$ per $n \geq N$

$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon$ per $n \geq N$

$\Rightarrow a_{n+1} < (L+\varepsilon)a_n$ per $n \geq N$.

$\Rightarrow a_{N+1} < (L+\varepsilon)a_N$

$a_{N+2} < (L+\varepsilon)a_{N+1} < (L+\varepsilon)^2 \cdot a_N$

$a_{N+3} < (L+\varepsilon)a_{N+2} < (L+\varepsilon)^3 a_N$

...

$a_{N+k} < \underbrace{(L+\varepsilon)^k}_{\downarrow 0} \cdot a_N$

per $k \to \infty$

Analogo se $L > 1$. $\blacksquare$

Applicazione: $a > 1$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = \frac{\infty}{\infty}$

Uso la prop. prec. con $a_n = \frac{a^n}{n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a}{n+1} \longrightarrow 0 < 1$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

Limiti di funzioni.

$I \subset \mathbb{R}$ un intervallo; $\bar{I} = I \cup$ gli estremi (anche $\pm\infty$)
$f : I \to \mathbb{R}$, $c \in \bar{I}$. Dico che $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ è

$$\lim_{x\to c} f(x) \quad \text{se}$$

$L \backslash c$	$\in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\in \mathbb{R}$	$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.c. $\lvert f(x) - L\rvert < \varepsilon$ per $\lvert x-c\rvert < \delta$, $x \neq c$	$\forall \varepsilon > 0\ \exists K$ t.c. $\lvert f(x) - L\rvert < \varepsilon$ per $x > K$	$\forall \varepsilon > 0\ \exists K$ t.c. $\lvert f(x) - L\rvert < \varepsilon$ per $x < K$
$+\infty$	$\forall K\ \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) > K$ per $\lvert x-c\rvert < \delta$, $x \neq c$	...	...
$-\infty$	...	...	$\forall K\ \exists H$ t.c. $f(x) < K$ per $x < H$

Oss: nelle colonne $+\infty$ e righe $+\infty$ K è interessante se positivo grande; nelle colonne $-\infty$ e righe $-\infty$ K/H interessanti se negativi grandi in $|\cdot|$

Varianti:

$\lim_{x \to c} f(x) = L^+$ se $\lim_{x \to c} f(x) = L$ e $f(x) > L$ per x abbastanza vicino a c

$\lim_{x \to c} f(x) = L^-$ . . . . $f(x) < L$

$c \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to c^+} f(x) = L \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta$ t.c. $|f(x) - L| < \varepsilon$ per $c < x < c + \delta$

$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ se . . . $c - \delta < x < c$

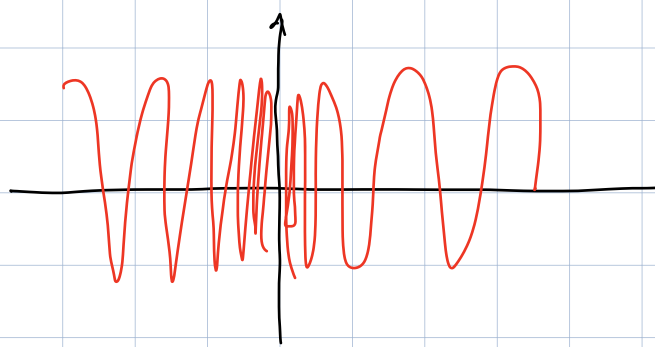
Esempi: $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ $(I = \mathbb{R} \setminus \{0\})$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ non esiste $\lim_{x \to 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|} \quad \text{non esiste} \qquad \lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{x}{|x|} = \pm 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sin(x) \quad \text{non esiste}$$

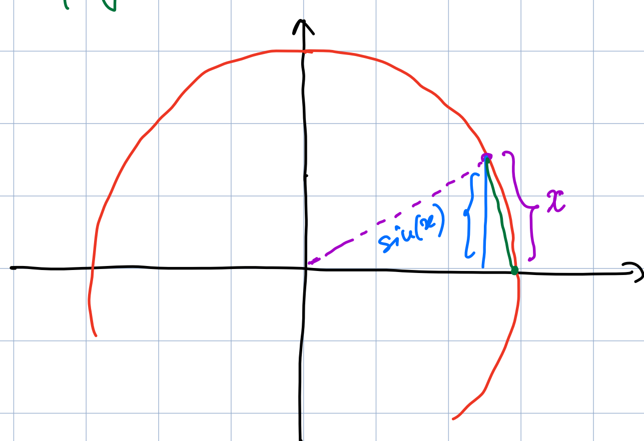
$$\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{non esiste}$$



$$\lim_{x \to 0} \sin(x) = 0$$

Attenzione: la ragione non è che $\sin(0) = 0$.

Spiegazione:



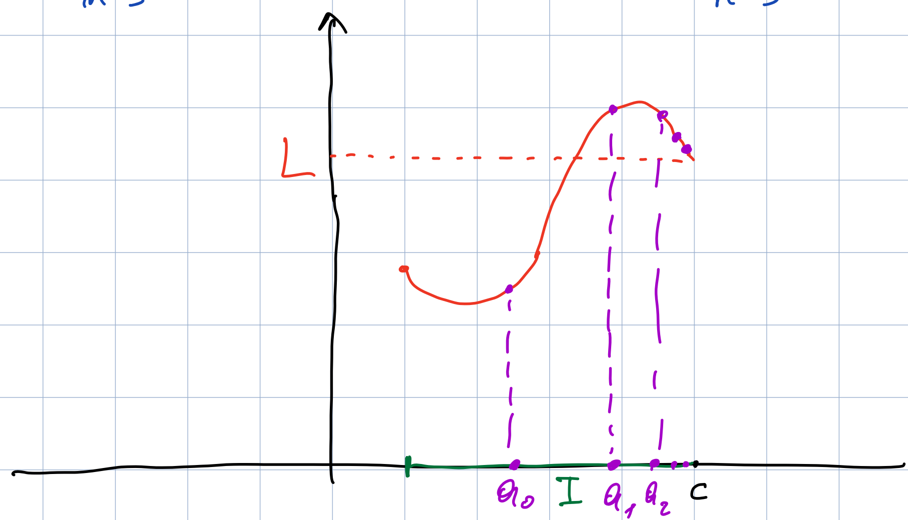
$$|\sin(x)| < \qquad < \qquad = |x|$$

Dunque $\lim_{x \to 0} \sin(x) = 0$:

nella def basta prendere $\delta = \varepsilon$.

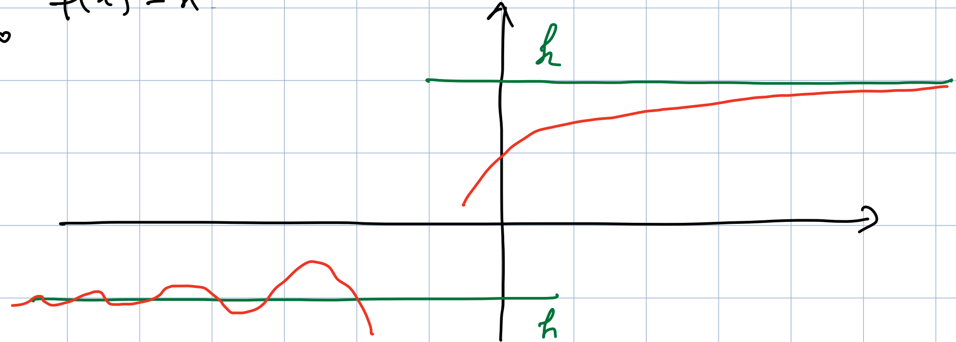
Collegamento con limiti di successioni:

Fatto: $\lim_{x\to c} f(x) = L$ se e solo se per ogni successione $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ a valori in I t.c. $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ si ha $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$.



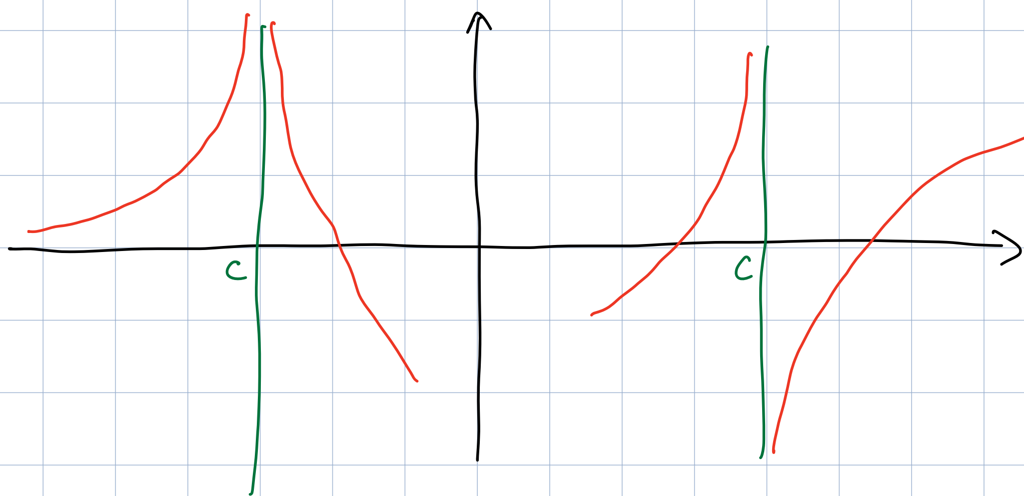
Def: diciamo che f ha

- asintoto orizzontale $y = h$ in $\pm\infty$ se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = h$



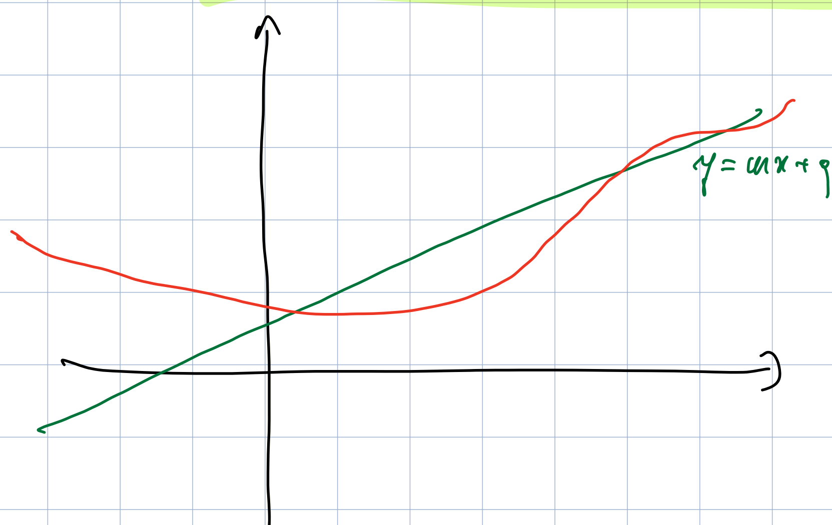
• asintoto verticale $x = c$ se $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$

o anche $\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$ $\quad \lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$



• asintoto obliquo $y = mx + q$ in $\pm\infty$

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \Big(f(x) - (mx + q) \Big) = 0}$$



Per calcoli: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ se esiste è m

$\lim_{x\to\infty} \left(f(x)-mx\right)$ se esiste è q.

Esercizio: provare l'equivalenza.

Teoremi sui limiti di funzioni: stessi che per successioni

- $f(x) \le g(x) \le h(x)$ $\quad |x-c|$ piccolo
  $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L \implies \lim_{x\to c} g(x) = L$

- $|f(x)| \le g(x)$ $\quad |x-c|$ piccolo
  $\lim_{x\to c} g(x) = 0 \implies \lim_{x\to c} f(x) = 0$

- $f(x)$ limitata vicino a c, $\lim_{x\to c} g(x) = 0$

  $\implies \lim_{x\to c} f(x)\cdot g(x) = 0$

- $\lim_{x\to c} f(x) > 0 \implies \underbrace{f(x) > 0 \text{ per } |x-c| \text{ piccolo}}_{\exists \delta>0 \text{ t.c. } f(x)>0 \text{ per } |x-c|<\delta}$

- $f(x) \ge 0$ per $|x-c|$ piccolo $\implies \lim_{x\to c} f(x) \ge 0$ se esiste

Forme indeterminate $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ...

Confronto di infiniti: $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$

$\lim_{x \to c} g(x) = \pm\infty$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} \begin{cases} \pm\infty & f \text{ è } \infty \text{ superiore a } g \text{ in } c \\ L \neq 0 & \text{stesso} \\ 0 & f \text{ è inferiore} \end{cases}$$

Fatto: $\log_a(x)$ ∞ inferiore e x^α inferiore a^x in $+\infty$, $a > 1$, $\alpha > 0$.

Inoltre x^α inferiore a x^β se $\alpha < \beta$.

———— o ————

Operazioni sulle funzioni:

date $f, g : I \to \mathbb{R}$ chiamo $f+g$ la funzione $I \longrightarrow \mathbb{R}$ data da $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

Oss: una funzione è $f : I \to \mathbb{R}$; invece $f(x)$ è il suo valore in x. Dire la funzione $f(x)$ è scorretto.

Date $f, g : I \to \mathbb{R}$ è scorretto dire
"la funzione $f(x)+g(x)$".

Invece: la funzione $f+g$ che in x
ha valore $f(x)+g(x)$.

<u>Oss</u>: ha senso sommare solo funzioni con
lo stesso dominio.

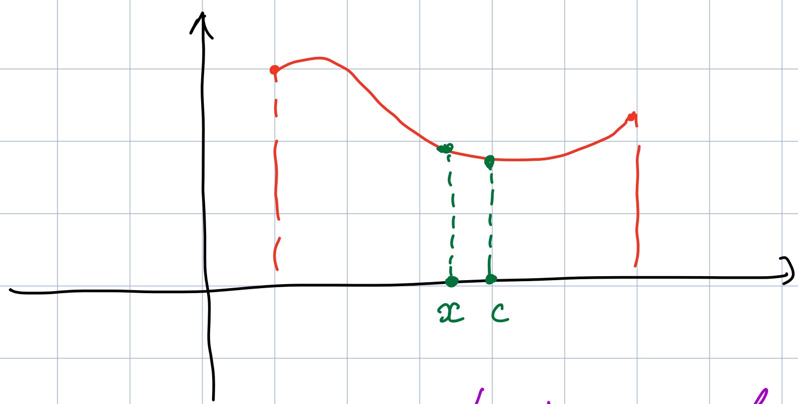
<u>Es</u>: $f(x) = x^7$ $\qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$g(x) = \log(x)$ $\qquad f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$
non si possono sommare. Invece con
$h(x) = x^7$ $\qquad h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$
si può calcolare $h+g$.

Date $f, g : I \to \mathbb{R}$ definisco $f \cdot g : I \to \mathbb{R}$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

"la funzione $f(x) \cdot g(x)$"
scorretto

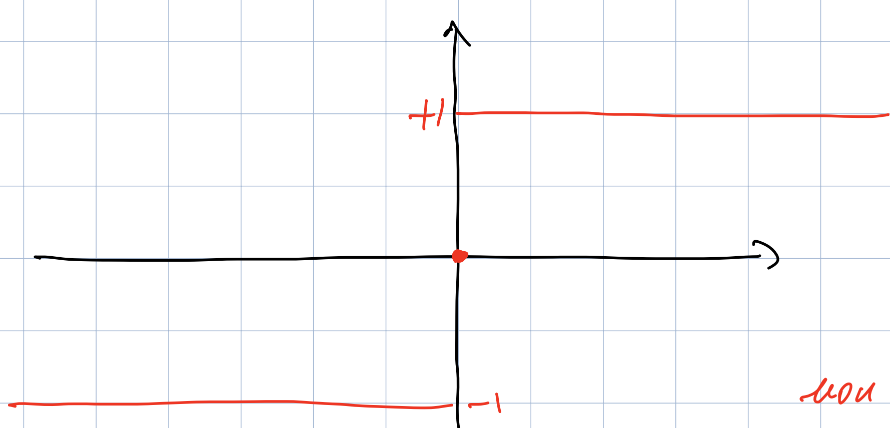
Def: data $f: I \to \mathbb{R}$, $c \in I$ diciamo che f è continua nel punto c se
$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$



su punti vicini a c ho valori vicini a f(c).

Def: $f: I \to \mathbb{R}$ è continua su I se è continua in ogni $c \in I$.

Es:
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$



non continua in 0

Discontinuità di salto in c se esistono $\lim_{x \to c^{\pm}} f(x)$ ma sono diversi.

Fatto: se $f, g : I \to \mathbb{R}$ sono continue (in c) allora $f+g$ e $f \cdot g$ sono continue (in c)

Se $f : I \to \mathbb{R}$ e $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$ definisco $\frac{1}{f} : I \to \mathbb{R} \qquad \frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$.

~~" la funzione $\frac{1}{f(x)}$ "~~

Fatto: se f è continua (in c) anche $\frac{1}{f}$ è continua (in c).

Fatto: sono continue

$x \mapsto x^k$ su $\mathbb{R}$ $\quad k \in \mathbb{N}$

$x \mapsto x^k$ su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0$

$x \mapsto x^a$ su $[0, +\infty)$ $\quad a \in \mathbb{R},\ a \geq 0$

$x \mapsto x^a$ su $(0, +\infty)$ $\quad a \in \mathbb{R},\ a < 0$

$x \mapsto a^x$ su $\mathbb{R}$, $\quad a > 0,\ a \neq 1$

$x \longmapsto \log_a(x)$ su $(0,+\infty)$, $a>0$, $a \neq 1$

$x \longmapsto \sin(x)$ su $\mathbb{R}$

$x \longmapsto \cos(x)$ su $\mathbb{R}$

Verifica che è continua su $\mathbb{R}$ la $x \mapsto x^k$, $k \in \mathbb{N}$.

<u>Oss</u>: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L \iff \lim\limits_{h\to 0} f(c+h) = L$

Devo verificare che $\lim\limits_{h\to 0} (x+h)^k = x^k \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{(x+h)^k} = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} x^{k-p} \cdot h^p$$

$$= \boxed{x^k} + h \cdot \underbrace{\sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} \cdot x^{k-p} \cdot h^{p-1}}$$

$$\wedge\!|$$

$$\sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} |x|^{k-p} \cdot |h|^{p-1}$$

$$\wedge\!| \quad \text{se } |h| \leq 1$$

$$\underbrace{\sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} \cdot |x|^{k-p}}_{\boxed{\text{numero indipendente da } h}}$$

$$\Longrightarrow \lim_{h\to 0} (x+h)^k = x^k.$$

Usando la continuità dell'inversa di una continua segue la continuità di $x \mapsto \sqrt[q]{x} = x^{1/q}$ e dunque di $x^{p/q}$ e dunque di x^a, $a \in \mathbb{R}$.

Verifico che è continua in ogni $x \in \mathbb{R}$ la

$$x \longmapsto a^x \quad \text{con} \quad a > 0, \ a \neq 1.$$

Faccio $a > 1$. Devo provare che

$$\lim_{h \to 0} a^{x+h} = a^x.$$

$a^{x+h} = a^x \cdot a^h$ quindi basta vedere che $\lim_{h \to 0} a^h = 1$; mi limito ad $h \to 0^+$

Comunque prendo $n \in \mathbb{N}$ per h abbastanza piccolo ho $h < 1/n$; quindi se dimostro che $\lim_{n \to \infty} a^{1/n} = 1$ concludo che anche

$$\lim_{h \to 0^+} a^h = 1.$$

Dato $\varepsilon > 0$ devo trovare N t.c.

$$a^{1/n} < 1 + \varepsilon \quad \text{per } n \geq N$$

cioè $\quad a < (1+\varepsilon)^n \quad$ per $n \geq N$

ma $(1+\varepsilon)^n \geq 1 + n \cdot \varepsilon$ (primi due addendi del binomiale)

quindi basta $a < 1 + n \cdot \varepsilon$ per $n \geq N$

ok per $N = \left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right] + 1$. $\blacksquare$