Ist. Mat. I - CIA
9/11/22

$\boxed{1}$ ① $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = 3$

② $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cdot\cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = 0$

③ $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+\cancel{\sqrt{x}}}} = 1$

④ $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\log(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{\log(x)}$ $\qquad x = 1+y$

$\displaystyle = \lim_{y\to 0} \underbrace{\frac{y}{\log(1+y)}}_{\to 1}\cdot(y+2) = 2$

⑤ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{x\cdot\log(1+x)}{1-\cos(x)}\right)^{3-x} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot(x+o(x))}{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}\right)^3 = 2$

$\displaystyle \underbrace{\frac{x^2}{1-\cos(x)}}_{\downarrow\ \frac{1}{\frac{1}{2}}} \cdot \underbrace{\frac{\log(1+x)}{x}}_{\downarrow\ 1}$

(6) $\lim_{x\to 0} \left(\log(\tan(x)) - \log(e^{\pi x} - 1) \right)$

$= \lim_{x\to 0} \log \frac{\tan(x)}{e^{\pi x}-1}$

$= \lim_{x\to 0} \log \left(\underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\pi x}{e^{\pi x}-1}}_{\to \frac{1}{1}=1} \cdot \frac{1}{\pi} \right) = -\log(\pi)$

(2) (1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+5x}}{\sinh(x)}$

$\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} \to \alpha$

$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x + o(x)$

$(x\to 0)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{1}{2}x+o(x) - \left(1+\frac{1}{3}5x+o(x)\right)}{\frac{1+x+o(x) - (1-x+o(x))}{2}}$

$\frac{e^{x}-1}{x} \to 1$

$e^{x} = 1+x+o(x)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{3}\right)x + o(x)}{x+o(x)} = -\frac{7}{6}$

(2) $\lim_{x\to e} \frac{x-e}{1-\log(x)}$

$x = e^{1+y}$

$x\to e$
$y \to 0$

$= \lim_{y\to 0} \frac{e^{1+y}-e}{1-(1+y)} = -e \cdot \lim_{y\to 0} \frac{e^{y}-1}{y} = -e$

③ $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \sin\left(\frac{2}{x}\right)\right)^x = \lim_{x \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{2}{x} + o(x)\right)^{\frac{x}{2}}\right)^2 = e^2$

④ $\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{x^2-1}}$ $\quad 1^\infty$

$= \lim_{x \to 1} \exp\left(\frac{1}{x^2-1} \cdot \log(x)\right)$

$= \lim_{x \to 1} \exp\left(\frac{\log(x)}{(x-1)(x+1)}\right)$ $\quad x = 1+y$

$= \lim_{y \to 0} \exp\left(\underbrace{\frac{\log(1+y)}{y}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{y+2}}_{\downarrow\, 1/2}\right) = \sqrt{e}$

⑤ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^3(3x)}{3\sin^3(x)} = \frac{(3x + o(x))^3}{3(x + o(x))^3} = \frac{27x^3 + o(x^3)}{3x^3 + o(x^3)} = 9$

⑥ $\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \sinh(x^2)}{\sin(x) - \tan(x)}$

$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$= \frac{1 + x + o(x) - (1 - x + o(x))}{2}$

$= x + o(x)$

$= \frac{x \cdot (x^2 + o(x^2))}{\sin(x) \cdot \left(1 - \frac{1}{\cos(x)}\right)}$

$= \frac{x^3 + o(x^3)}{(x + o(x)) \cdot \frac{\cos(x) - 1}{\cos(x)}} = \frac{x^3 + o(x^3)}{(x + o(x)) \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x)\right)}{\cos(x)}}$

$$= \frac{x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} = -2$$

(22) $f(x) = \begin{cases} \cos(x) & x < 0 \\ e^x - 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 & x > 2 \end{cases}$

$\lim$

$0^- \to 1$

$0^+ \to 0$

$1^\pm \to e-1$

$2^- \to e^2-1$

$2^+ \to 4$

(23) $\lfloor x \rfloor =$ "parte intera di x" $= \max\{n : n \leq x\}$

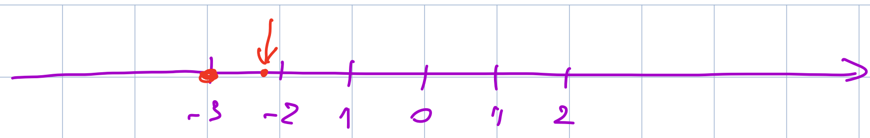
$\left(\lceil x \rceil = \min\{n : n \geq x\} \right)$

$\lim_{2^+} \lfloor x \rfloor = 2$ $\qquad \lim_{2^+} \lfloor 1-x \rfloor = -2$

$\lim_{2^-} \lfloor x \rfloor = 1$ $\qquad \lim_{2^-} \lfloor 1-x \rfloor = -1$

$\lim_{-2^+} \lfloor x \rfloor = -2$ $\qquad \lim_{2^\pm} \lfloor \pi - x \rfloor = 1$

$\lim_{-2^-} \lfloor x \rfloor = -3$



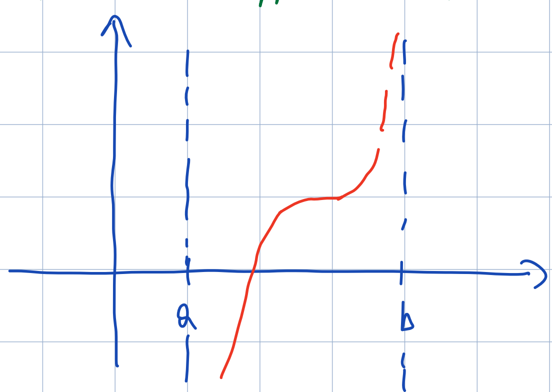
Provare: 24 - 28 (NO: 25-26-27)

———— o ————

Prop: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ monotone $\Rightarrow$ $\exists \lim f$ in a^+ e b^-.

(senza ipotesi continue)

Dim: supponiamo f crescente e proviamo che esiste $\lim_{x\to b^-} f(x)$:



Pongo $S=\sup\{f(x): x\in(a,b)\}$

e provo che $\lim_{x\to b^-} f(x)=S$.

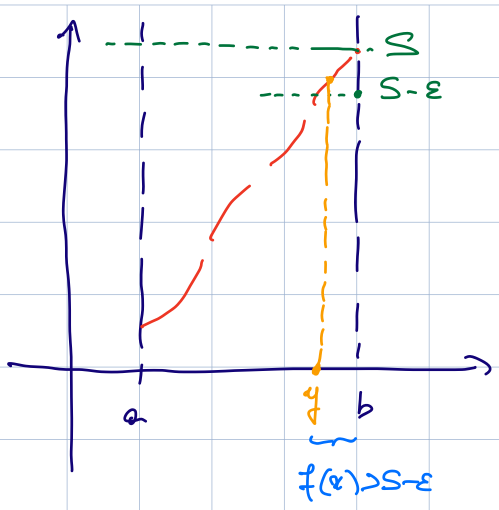
Due casi: $S\in\mathbb{R}$ o $S=+\infty$.

$S\in\mathbb{R}$. Dato $\varepsilon>0$ devo provare che $\exists\,\delta$ t.c.

se $x\in(b-\delta,\ b)$ si ha $|f(x)-S|<\varepsilon$.

Poiché $S=\sup\{f(x): x\in(a,b)\}$ $\exists\, y\in(a,b)$

t.c. $f(y)>S-\varepsilon$; inoltre $f(x)\le S$ $\forall x\in(a,b)$



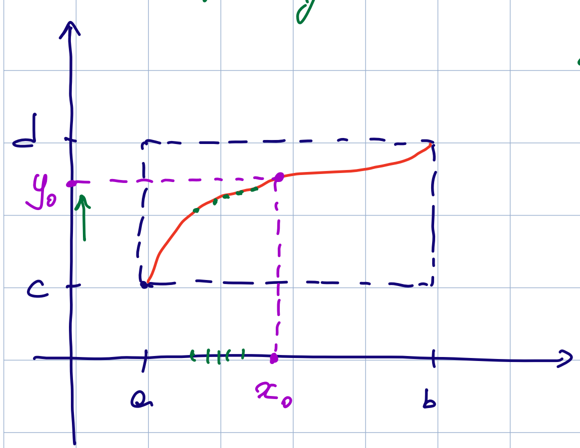
Poiché f è crescente
$S-\varepsilon < f(x) \le S < S+\varepsilon$
$\forall x \in (y, b)$
Quindi basta scegliere
$\delta = b - y$

$S = +\infty$: analogo.

Prop: se $f : [a,b] \to [c,d]$ è invertibile e continua allora f^{-1} è continua.

Dim: f continua invertibile $\Longrightarrow$ strettamente monotona.
Supponiamo crescente.

Prendo $y_0 \in [c,d]$, $y_0 \neq c, d$ (altrimenti analogo) e dimostro f^{-1} è continua in y_0. Osservo che anche f^{-1} è strettamente crescente.



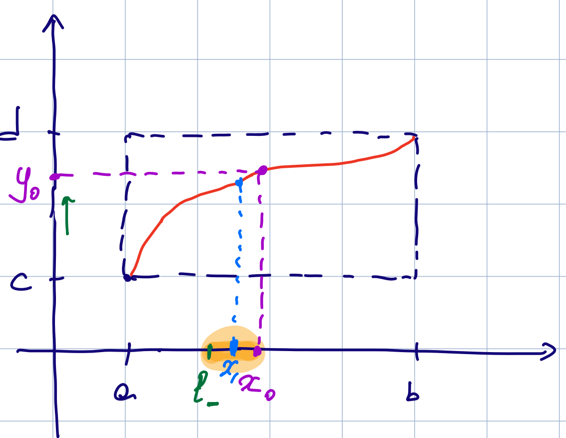
Posto $x_0 = f^{-1}(y_0)$ devo vedere che $\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = x_0$.

Visto sopra: esistono $\lim_{y \to y_0^\pm} f^{-1}(y) = \ell_\pm$.

Certamente $\ell_- \le x_0$ e $x_0 \le \ell_+$.

Se $\ell_- = \ell_+ = x_0$ è provato che $\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = x_0$.

Suppongo per assurdo $\ell_- < x_0$ oppure $x_0 < \ell_+$:



Nel caso $\ell_- < x_0$ prendo $\ell_- < x_1 < x_0$:

$f(x_1) > f(\ell_-)$

$\Rightarrow f^{-1}(f(x_1)) > \ell_-$: assurdo.

$\blacksquare$

<u>Richiamo</u>:

$$f'(x) = \underbrace{\lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\substack{\text{coeff. ang.} \\ \text{secante grafico nei pti} \\ \text{di ascisse } x \text{ e } x+h}}}_{\text{coeff. ang. tangente}}$$

$$f'(x) = \underbrace{\lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\substack{\text{velocità media tra il} \\ \text{tempo } x \text{ e il tempo } x+h}}}_{\text{velocità istantanea}}$$

Derivate di ordine superiore: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$

$f''(x)$ = derivata in x di f' se f' esiste su (a,b)

$f^{(n)}(x)$ = derivata di $f^{(n-1)}$

Se f è la legge di moto rettilineo
$f''(x)$ = accelerazione al tempo x.

Notazioni:

$$f^{(n)} = D^n f = \frac{d^n f}{dx^n}$$

Derivate di alcune funzioni notevoli:

$$D(\text{cost}) = 0$$

$$\boxed{D(x^\alpha)} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x^\alpha}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x}}}_{\to\,\alpha}\cdot x^{\alpha-1} = \boxed{\alpha\cdot x^{\alpha-1}}$$

$$\boxed{D(\sin(x))} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\sin(x) \cdot \underbrace{\frac{(\cos(h) - 1)}{h}}_{\downarrow \, 0} + \cos(x) \cdot \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\downarrow \, 1} \right) = \boxed{\cos(x)}$$

$$\boxed{D(\cos(x))} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\cos(x) \cdot \underbrace{\frac{(\cos(h) - 1)}{h}}_{\downarrow \, 0} - \sin(x) \cdot \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\downarrow \, 1} \right) = \boxed{-\sin(x)}$$

$$\boxed{D(e^x)} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{1} = \boxed{e^x}$$

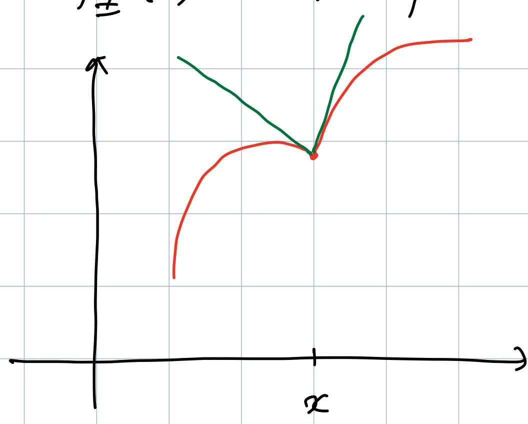
$$\boxed{D(\log(x))} = \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h}$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}_{1} \cdot \frac{1}{x} = \boxed{\frac{1}{x}}$$

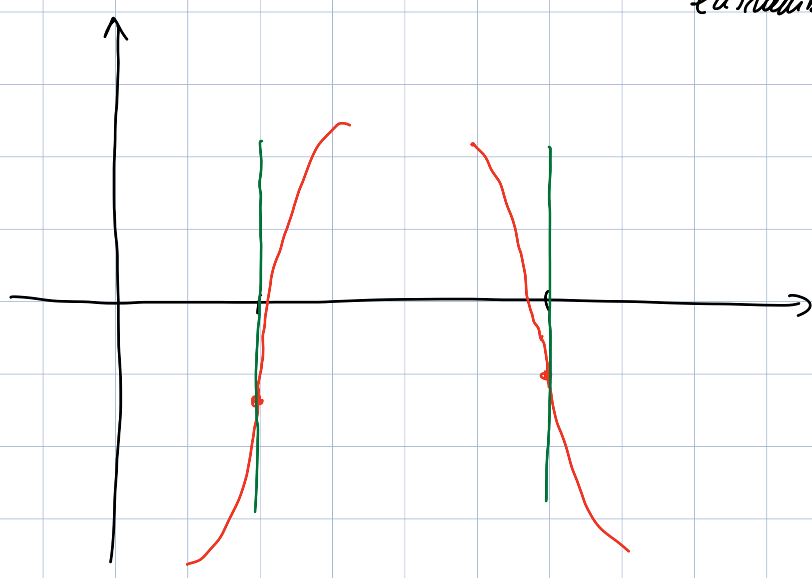
Def: derivate laterali $\quad f'_{\pm}(x) = \lim_{h\to 0^{\pm}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$

x si dice punto:

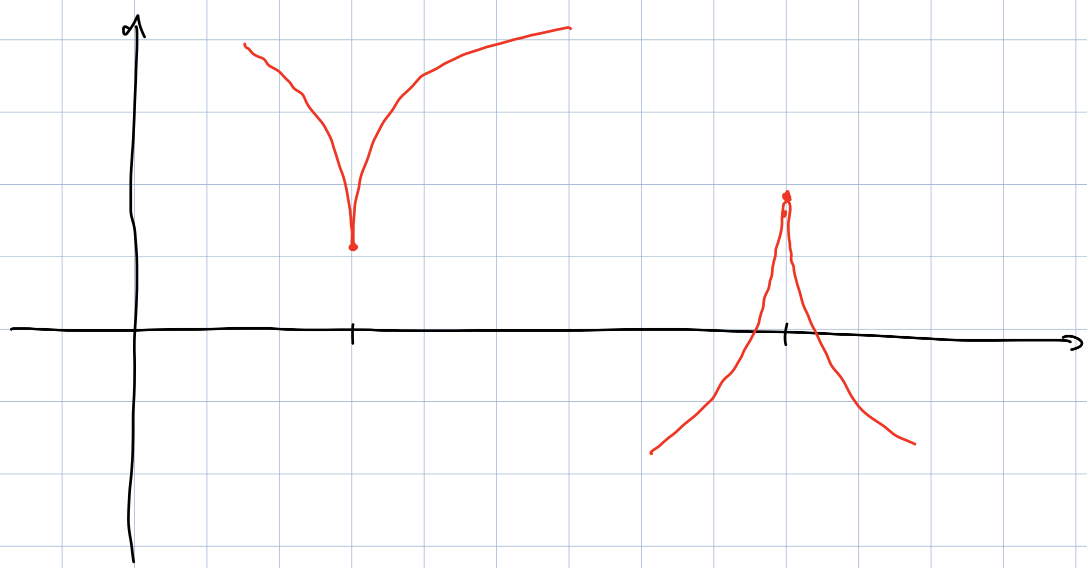
- angoloso se $f'_\pm(x)$ esistono finite ma sono diverse:



- a tangente verticale se $f'_\pm$ coincidono e sono entrambe $+\infty$ o $-\infty$:



- di cuspide se $f'_\pm(x)$ valgono $\pm\infty$ o $\mp\infty$



Se una tra $f'_\pm$ è finita e l'altra è $+\infty$ o $-\infty$ lo chiamo ancora angoloso:

<u>Oss</u>: se $f'(x)$ esiste allora f è continua in x:

$$\lim_{y\to x} f(y) = \lim_{h\to 0} f(x+h)$$

$$= \lim_{h \to 0} f(x+h) - f(x) + f(x)$$

$$= \lim_{h \to 0} \underbrace{\left(\underbrace{h \cdot \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{f'(x)}}_{0} + f(x) \right)}_{f(x)}$$

Conseguenza: f derivabile su $(a,b) \Rightarrow f$ continua su (a,b)