Ist. Mat. I - CIA

10/11/22

$$\boxed{(f+g)' = f' + g'}$$

$$\boxed{(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}}$$ (nei punti in cui $g\neq 0$)

$$\frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = -\underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\downarrow\; g'(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)}}_{\frac{1}{g(x)^2}}$$

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)' = f'\cdot\frac{1}{g} + f\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'$$

$$= f'\cdot\frac{1}{g} + f\cdot\left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$$

$$\boxed{(g\circ f)' = (g'\circ f)\cdot f'}$$

$$\frac{d}{dx}\left(f(g(x)\right) = \frac{dg}{dy}(f(x))\cdot\frac{df}{dx}(x)$$

Interpretazione $\quad y = \underset{f}{y}(x) \qquad z = \underset{g}{z}(y)$

$$z = z(x) = \underbrace{z\,(y}_{g\circ f}(x))$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{\cancel{dy}}\cdot\frac{\cancel{dy}}{dx}$$

informalmente

$$\frac{(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)}{h} = \frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}$$

$$= \frac{g(f(x)+\overbrace{(f(x+h)-f(x))}^{k})-g(f(x))}{\underbrace{f(x+h)-f(x)}_{k}}\cdot\underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\downarrow\; f'(x)}$$

$h\to 0 \Rightarrow k\to 0$

$$\underbrace{\frac{g(f(x)+k)-g(f(x))}{k}}_{\downarrow\; g'(f(x))}$$

Verificato che: $D(g \circ f) = ((Dg) \circ f) \cdot (Df)$.

$$\boxed{\tan' = 1 + \tan^2}$$

$$\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

$$\boxed{\cot' = -1 - \cot^2}$$

$$\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)' = \frac{-\sin(x) \cdot \sin(x) - \cos(x) \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)}$$

$$= -\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$$

$$\boxed{(a^x)' = \log(a) \cdot a^x}$$

$$(a^x)' = \left(e^{\log(a^x)}\right)' = \left(e^{x \cdot \log(a)}\right)' = \circledast$$

$$e^{k\cdot x} = g(f(x)) \qquad f(x) = k\cdot x \qquad g(y) = e^y$$

$$\Rightarrow \left(e^{k\cdot x}\right)' = g'(f(x))\cdot f'(x)$$
$$= e^{k\cdot x}\cdot k$$

$$\otimes = e^{x\cdot \log(a)}\cdot \log(a) = \log(a)\cdot a^x$$

$$\boxed{\left(\log_a(x)\right)' = \frac{1}{\log(a)\cdot x}}$$

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} \Rightarrow \left(\log_a(x)\right)' = \frac{1}{\log(a)}\cdot\frac{1}{x}$$

$$\boxed{\left(\sinh(x)\right)' = \cosh(x)} \qquad \boxed{\left(\cosh(x)\right)' = \sinh(x)}$$

$$\left(\frac{e^x \pm e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x \mp e^{-x}}{2}$$

Fatto: $\sin, \cos$ soddisfano la relazione $f'' = -f$
$\sinh, \cosh$ soddisfano la relazione $f'' = f$.

Una uguaglianza che coinvolge $f, f', f'', \dots f^{(n)}$ vista come equazione con incognita f si chiama equazione differenziale di ordine n.

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(\exp\left(\log\left(f(x)^{g(x)}\right)\right)\right)'$$

$$= \left(\exp\left(g(x) \cdot \log(f(x))\right)\right)'$$

$$= \underbrace{\exp\left(g(x) \cdot \log(f(x))\right)}_{f(x)^{g(x)}} \cdot \left(g'(x) \cdot \log(f(x)) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\right)$$

__Fatto__ : $\left(\log|x|\right)' = \frac{1}{x}$ per $x \neq 0$

Per $x > 0$ visto $(\log(x))' = \frac{1}{x}$;

Per $x < 0$ ho $\log|x| = \log(-x)$

$$\Longrightarrow \left(\log|x|\right)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

Fatto: data $f:(a,b)\to(c,d)$ invertibile con $f'(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,b)$ si ha che f^{-1} è derivabile e ha derivata

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

I "spiegazione": suppongo di sapere già che f^{-1} è derivabile.

$$(f^{-1}\circ f)(x) = x \qquad \forall x\in(a,b)$$

$$\Longrightarrow (f^{-1})'(f(x))\cdot f'(x) = 1$$

$$\Longrightarrow (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$y = f(x)$

$x = f^{-1}(y)$

$$\Longrightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Interpretazione: data $y = \underset{f}{y}(x)$ invertibile la sua inversa $x = \underset{f^{-1}}{x}(y)$ ha derivata

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

informalmente

II spiegazione di $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Chiamo $f^{-1} = g$ e $f^{-1}(y) = x$; devo vedere

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Rapp. incr. di g in y : $\dfrac{g(y+h) - g(y)}{h}$.

Pongo $k = g(y+h) - g(y)$: ho verificato che f derivabile $\Longrightarrow$ f continua $\Longrightarrow$ g continua pertanto $k \to 0$ se $h \to 0$. Calcolo :

$$g(y+h) = g(y) + k = x + k \quad ; \text{ applico } f = g^{-1}$$

$$\Longrightarrow \quad y + h = f(x+k)$$

$$\Longrightarrow \quad h = f(x+k) - y = f(x+k) - f(x)$$

Ho riscritto :

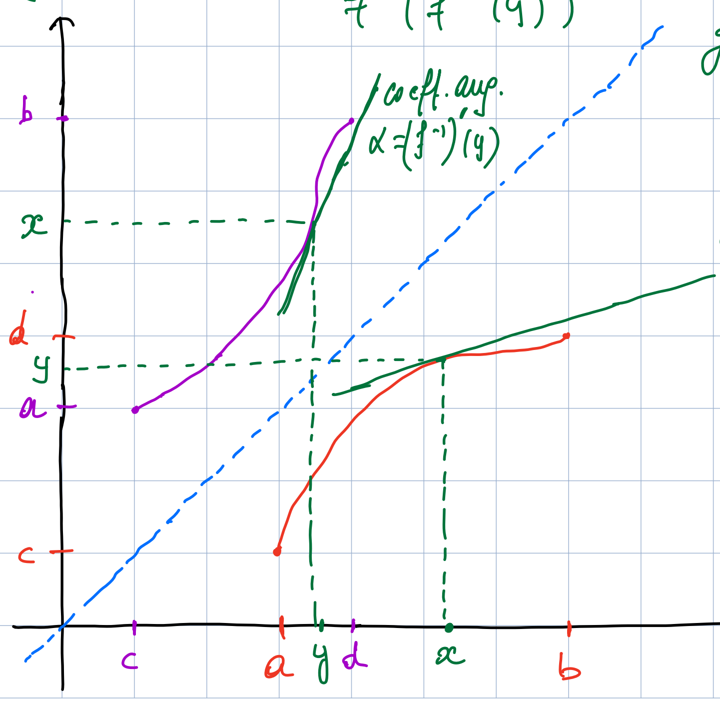
$$\frac{g(y+h)-g(y)}{h} = \frac{k}{f(x+k)-f(x)}$$

$$= \frac{1}{\frac{f(x+k)-f(x)}{k}}$$

$$\frac{g(y+h)-g(y)}{h} \xrightarrow{h \to 0} g'(y)$$

$$\frac{1}{\frac{f(x+k)-f(x)}{k}} \xrightarrow{k \to 0} \frac{1}{f'(x)}$$

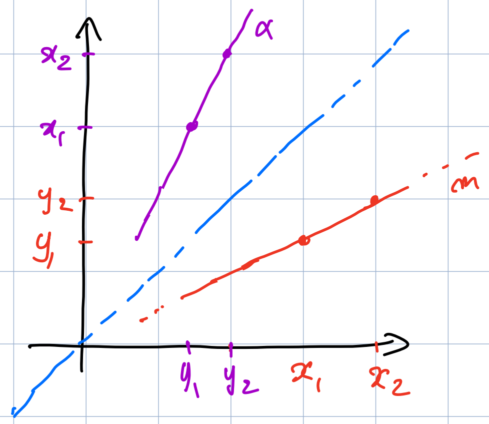
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$ ha interpretazione geometrica :



coeff. ang. $m = f'(x)$

Fatto : $\alpha = \frac{1}{m}$

Altra dimostrazione di $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\alpha = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

$$\Longrightarrow \alpha = \frac{1}{m}$$

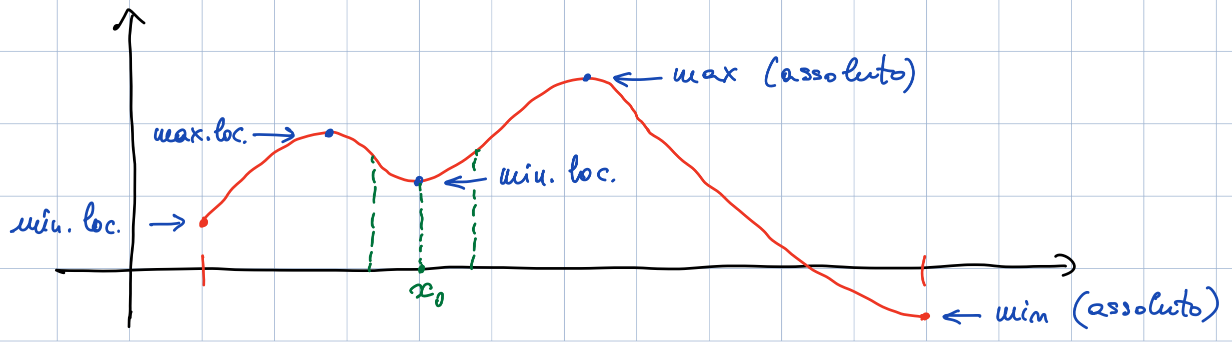
———— o ————

Ricerca di max e min.

Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua so che $f([a,b]) = [c,d]$ dunque $c = \min(f)$, $d = \max(f)$.

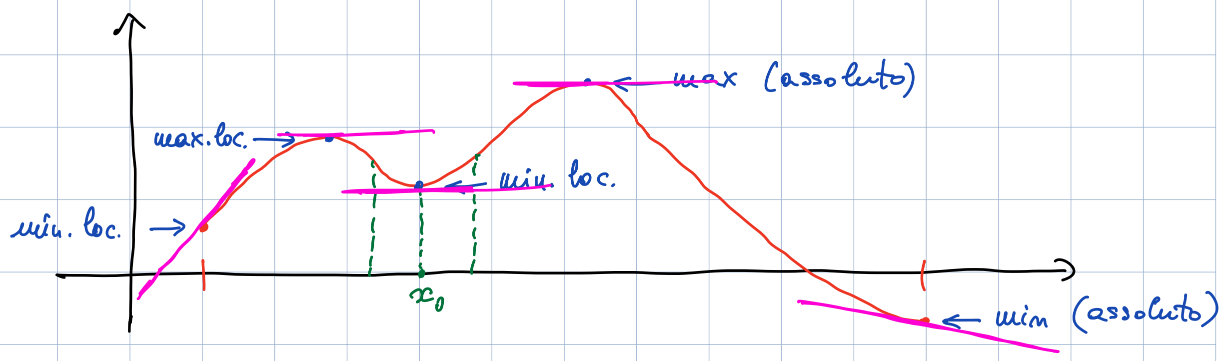
Problema naturale: trovare i punti x in cui $f(x)$ è min o max.

Def: x_0 è di max. $\underbrace{\text{locale}}_{}$ (o relativo) per f se esiste $\varepsilon > 0$ t.c. $f(x) \leq f(x_0)$ per $x \in [a,b]$, $|x - x_0| < \varepsilon$.
min loc. se $\exists \varepsilon \ldots$ $f(x) \geq f(x_0)$ per $|x - x_0| < \varepsilon$.



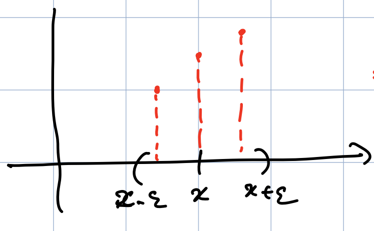
Chiamo estremale un pto. di max o min. loc.

<u>Prop</u>: se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua e derivabile su (a,b) in un punto x estremale in (a,b) si ha $f'(x)=0$.



Infatti se $f'(x)\neq 0$ ho due casi:

$$f'(x)>0 \Rightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}>0 \text{ per } 0<|h|<\varepsilon \Rightarrow \begin{array}{l} f(x+h)>f(x) \text{ per } 0<h<\varepsilon \\ f(x+h)<f(x) \text{ per } -\varepsilon<h<0 \end{array}$$



$\Rightarrow$ no max/min loc

$$f'(x)<0 \Rightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}<0 \text{ per } 0<|h|<\varepsilon$$

$\Rightarrow$ ... stesso con $<$ / $>$ scambiati.

Def: se $f'(x)=0$ chiamo x stazionario.

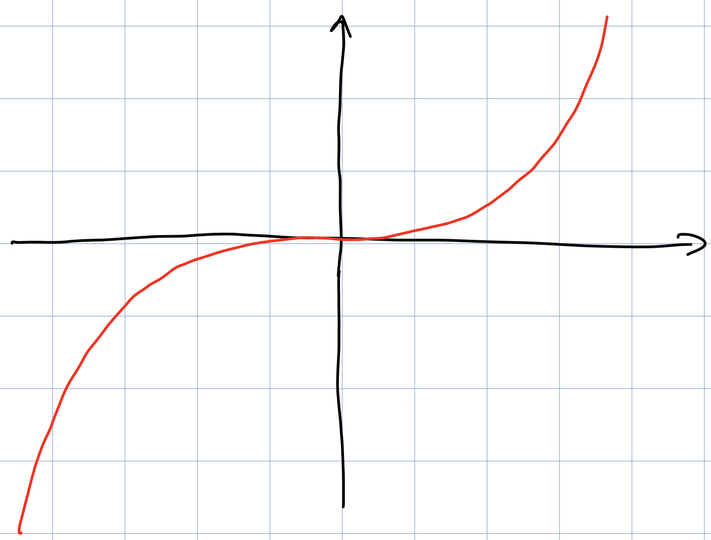
Visto: x estremale interno $\Longrightarrow$ stazionario.

Oss: non vale viceversa:

stazionario interno $\not\Longrightarrow$ estremale.

Es: $f(x)=x^3$, $x_0=0$.

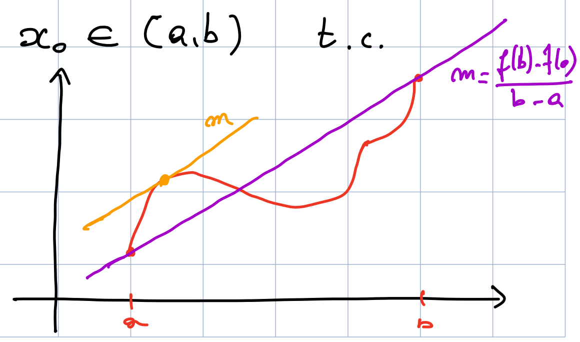
$f'(x)=3x^2 \Rightarrow f'(0)=0$ ma



f è strettamente crescente $\Rightarrow$ non ha max/min loc.

Teorema (Lagrange): data $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua e derivabile su (a,b) esiste $x_0\in(a,b)$ t.c.

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



Infatti: pongo $g(x) = f(x) - (\underbrace{m(x-a) + f(a)}_{\text{retta per estremi del grafico}})$

Ho che g è continua su $[a,b]$ e derivabile su (a,b) inoltre $g(a) = g(b) = 0$. Ora g ha max e min; due casi:

- $g \equiv 0 \Rightarrow f(x) = m(x-a) + f(a) \Rightarrow f'(x) \equiv m$
- $g \not\equiv 0$ ammette pto estremale (assoluto) interno x_0 $\Rightarrow g'(x_0) = 0$

ma: $g'(x_0) = f'(x_0) - m$

$\Rightarrow f'(x_0) = m$. ∎