Ist. Mat. I - CIA
17/11/22

$$\frac{e^x-1}{x} \to 1 \quad \Rightarrow \quad e^x = 1+x+o(x) \quad \text{cioè} \quad \frac{e^x-(1+x)}{x} \to 0$$

$$\frac{e^x-(1+x)}{x^2} \quad \frac{0}{0} \underset{\text{reg. di de l'H.}}{\rightsquigarrow} \quad \frac{e^x-1}{2x} \to \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

$$\frac{e^x-(1+x+\frac{1}{2}x^2)}{x^3} \quad \frac{0}{0} \rightsquigarrow \quad \frac{e^x-(1+x)}{3x^2} \to \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

$$\frac{e^x-(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3)}{x^4} \quad \frac{0}{0} \rightsquigarrow \quad \frac{e^x-(1+x+\frac{1}{2}x^2)}{4x^3} \to \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$$

$$\Rightarrow e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$$

$0! \quad 1! \quad 2! \quad 3! \quad 4!$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k + o(x^n)$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2n})$$

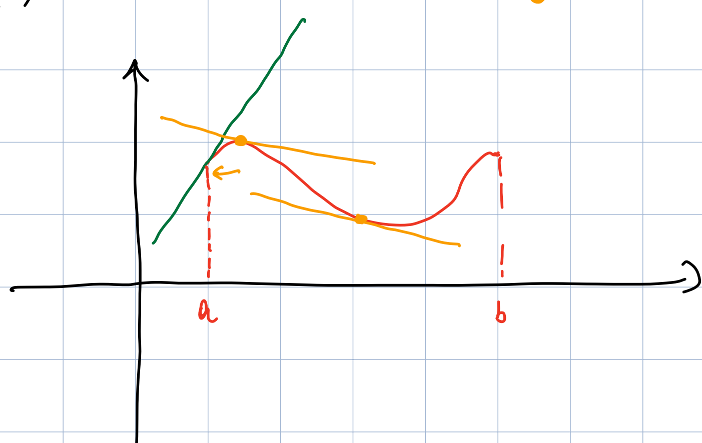
$$\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\frac{1}{\cosh(x)-\cos(x)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)}$$

$$= \frac{1}{x^2+o(x^2)} \cong \frac{1}{x^2}$$

Data $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua e derivabile in (a,b) possiamo cercare di calcolare:

- $f'_+(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
- $\lim_{x\to a^+} f'(x)$



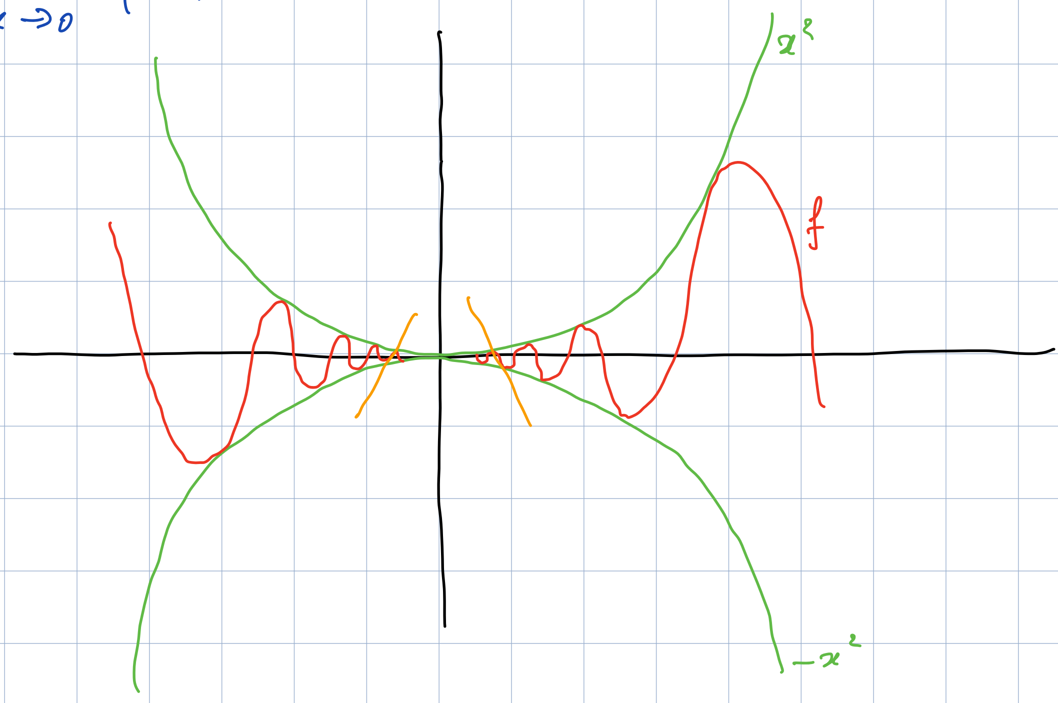
Es: $f(x) = \begin{cases} x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\cdot\sin\left(\frac{1}{h}\right)-0}{h} = \lim_{h\to 0} h\cdot\sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

$$f'(x) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \underbrace{2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{0} - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$\lim_{x \to 0} f'(x)$ NON ESISTE



Fatto: se $\lim_{x \to a^+} f'(x) = L$ allora $f'_+(a) = L$.

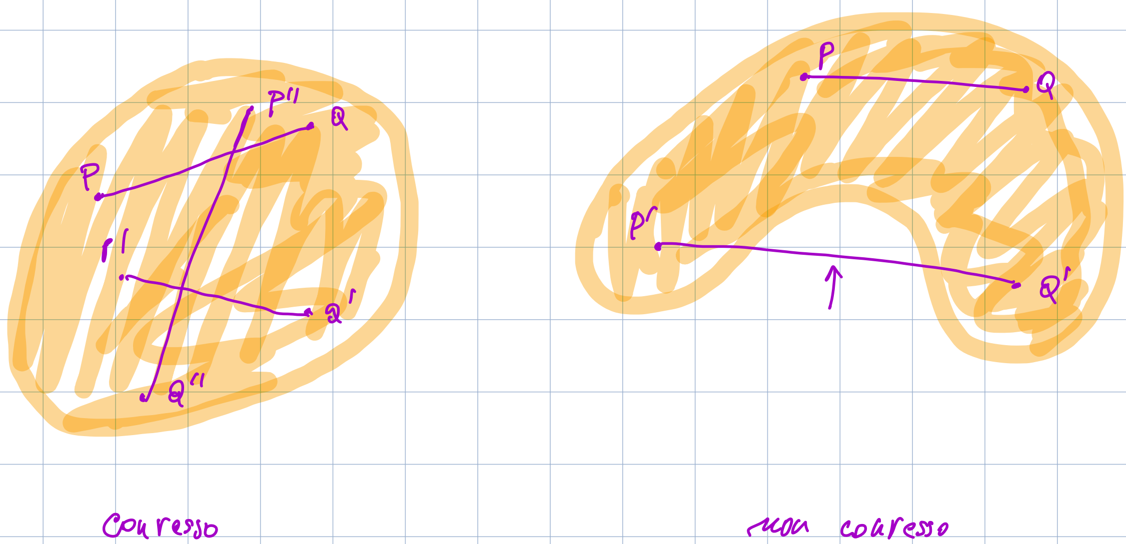
Infatti: $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(c)$ $\quad a < c < a+h$

(Lagrange su $[a, a+h]$)

per $h \to 0$ ho $c \to a$

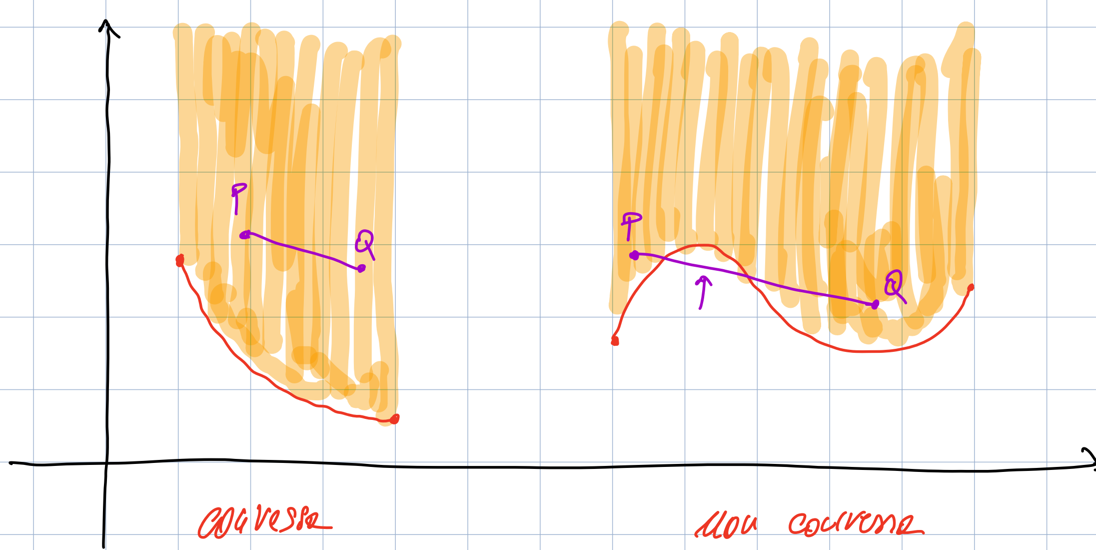
$\Rightarrow f'(c) \to L$.

Def: $A \subset \mathbb{R}^n$ è <u>convesso</u> se $\forall p, q \in A$ il segmento di estremi P e Q è contenuto in A.



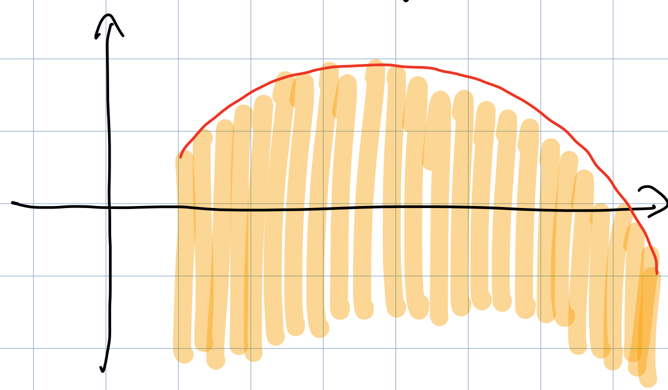
Def: $f : I \to \mathbb{R}$ si dice convessa se il sopragrafico di f

$$A = \{ (x,t) : x \in I \, , \; t \geq f(x) \}$$ è convesso.

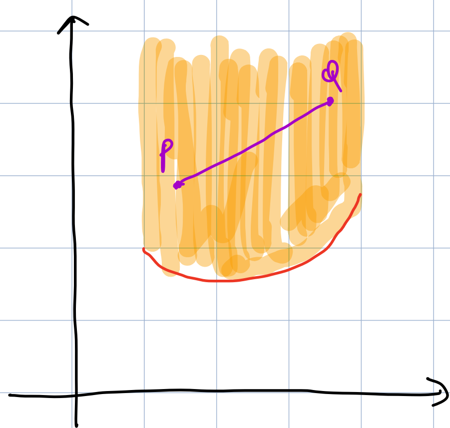


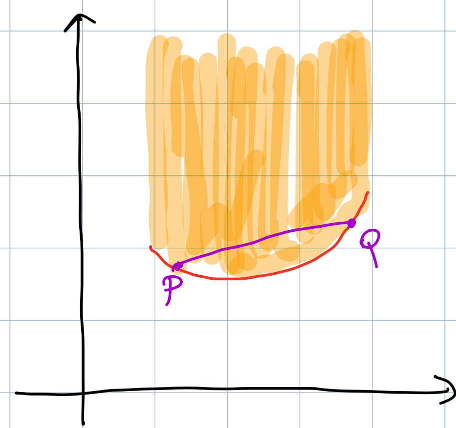
Def: f è concava se $-f$ è convessa

cioè se il sottografico è convesso.



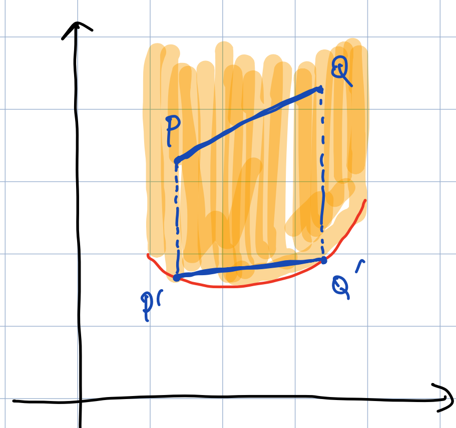
Oss: f è convessa $\Longleftrightarrow$ ogni segmento con estremi sul grafico di f è contenuto nel sopragrafico.



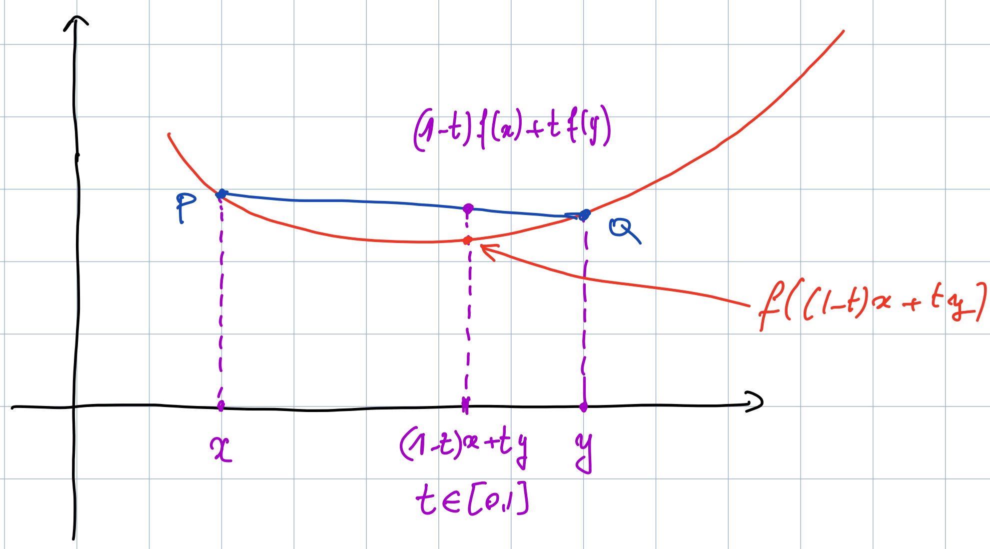


$\Longrightarrow$ ovvio.

$\Longleftarrow$:



tutto PQ è sopra $P'Q'$, ma $P'Q'$ è nel sopragrafico $\Rightarrow$ anche PQ.



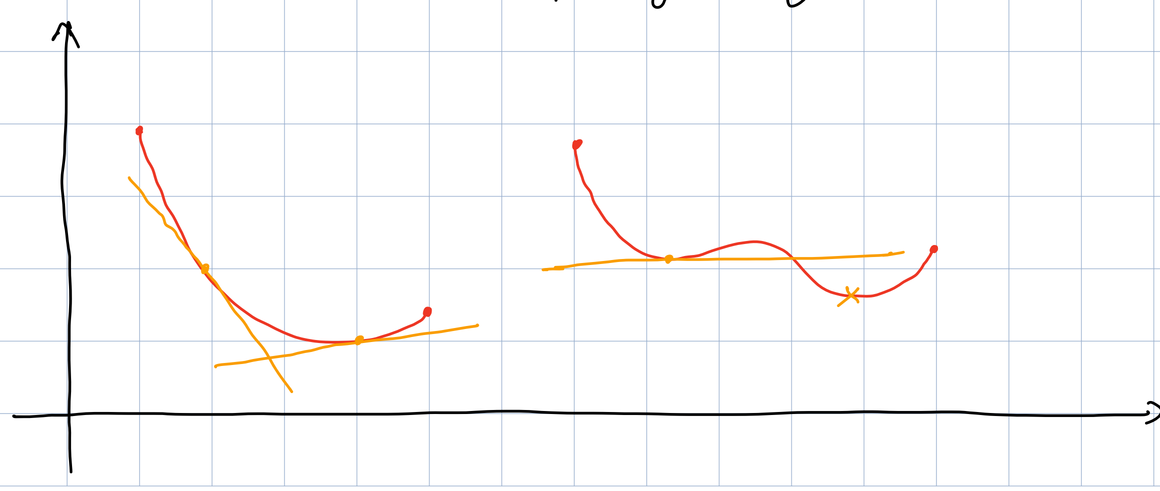
Fatto: f convessa $\iff$ $\forall\, x,y\in I$, $x<y$, $\forall t\in[0,1]$

$$f((1-t)x+ty)\leq(1-t)f(x)+t\,f(y)$$

Def: f è strettamente convessa se $\forall\, x<y$ in I, $\forall t\in(0,1)$

$$f((1-t)x+ty)<(1-t)\cdot f(x)+t\cdot f(y).$$

Fatto (che dimostreremo): f è convessa $\iff$ il suo grafico è sopra ogni tangente allo stesso

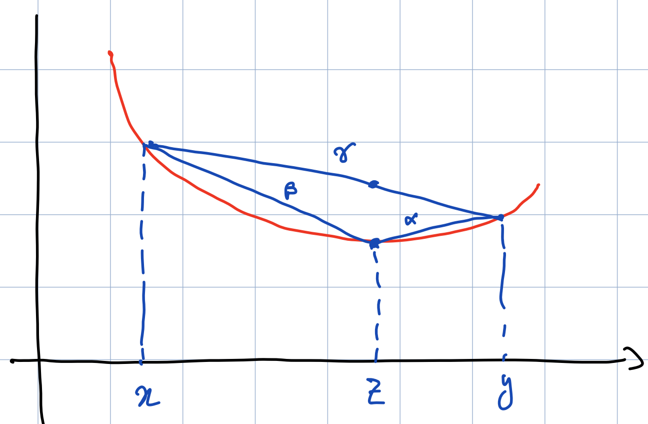


Fatto: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile due volte; allora

$$f \text{ convessa} \iff f' \text{ crescente su } (a,b)$$
$$\iff f'' \geq 0 \text{ su } (a,b)$$

facile: g crescente $\iff g' \geq 0$

$\Longrightarrow$ Prendo $x<y$; devo vedere $f'(x) \leq f'(y)$.
Scelgo $x<z<y$ e noto:



γ sta sopra α e β
$\Rightarrow$ coeff. di γ compreso tra quello di β e quello di α

$$\underset{\beta}{\frac{f(z)-f(x)}{z-x}} \leq \underset{\gamma}{\frac{f(y)-f(x)}{y-x}} \leq \underset{\alpha}{\frac{f(y)-f(z)}{y-z}}$$

indip. da z

$\downarrow z\to x^+$: $f'(x)$

$\downarrow z\to y^-$: $f'(y)$

(⇐) Devo provare che $\boxed{f((1-t)x+ty) \le (1-t)f(x)+tf(y)}$

Applico Lagrange a f su $[x, \underbrace{(1-t)x+ty}_{z}]$ e $[\underbrace{(1-t)x+ty}_{z}, y]$

$\exists c \in (x,z)$ t.c. $$\frac{f((1-t)x+ty)-f(x)}{(1-t)x+ty-x} = f'(c)$$

$\wedge$ ← ipotesi $f' \nearrow$

$\exists d \in (z,y)$ t.c. $$\frac{f(y)-f((1-t)x+ty)}{y-((1-t)x+ty)} = f'(d)$$

$$\frac{f(z)-f(x)}{t\,\cancel{(y-x)}} \le \frac{f(y)-f(z)}{(1-t)\,\cancel{(y-x)}}$$

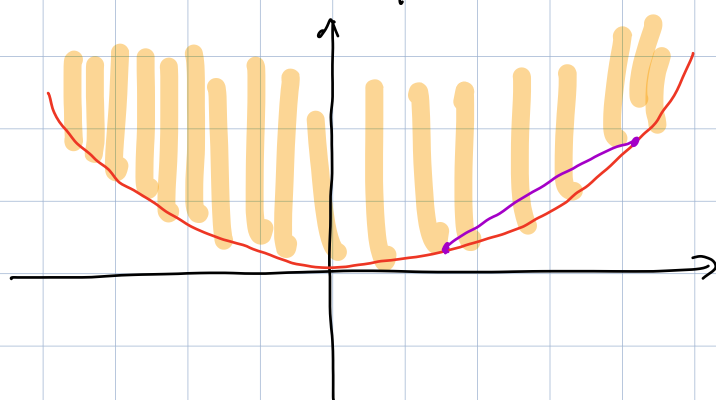
$$(1-t)f(z)-(1-t)f(x) \le t\,f(y)-t\,f(z)$$

$$\boxed{f(z) \le (1-t)f(x)+t\,f(y)}$$

Con stesso argomento: $f''>0 \Rightarrow f$ strett. convessa.

Falso viceversa: $f(x)=x^4$ $\qquad f''(x)=12x^2 \ge 0$

nullo in 0.



Def: x punto di flesso se a sin/dx di x la f è convessa/concava o viceversa.

Oss: x pto di flesso $\Rightarrow f''(x) = 0$
Falso viceversa $(f(x) = x^4)$.

— o —

Studi di funzione
- "dominio"
- valori o limiti agli estremi
- asintoti
- crescenza/decrescenza/max/min
- convessità/concavità/flessi
- zeri, periodicità, (dis)parità ...

— o —

Approssimazione di Taylor di $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile n volte, in $x_0 \in (a,b)$:

($x_0 = 0$ McLaurin)

$$\boxed{f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot f^{(k)}(x_0) \cdot (x-x_0)^k}_{P_n(x)} + \underbrace{o((x-x_0)^n)}_{\text{resto di Peano}}}$$

Fatto: $P_n^{(h)}(x_0) = f^{(h)}(x_0) \qquad h = 0, \dots, n$

Infatti: $D^h\left((x-x_0)^k\right) = \begin{cases} \dots (x-x_0)^{k-h} & h<k \\ k! & h=k \\ 0 & h>k \end{cases}$

calcolata in x_0 fa 0 tranne che per $h=k$, fa $k!$

$\Longrightarrow$ ok (facile)

$$\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n} \overset{\frac{0}{0}}{\rightsquigarrow} \frac{f'(x)-P_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \overset{\frac{0}{0}}{\rightsquigarrow} \frac{f''(x)-P_n''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}$$

$$\dots \rightsquigarrow \frac{f^{(n)}(x)-P_n^{(n)}(x)}{n!} \longrightarrow 0 \qquad \blacksquare$$

Oss: $P_n(x)$ è stato scelto appositamente come l'unico polinomio di grado n che in x_0 ha le stesse derivate di f di ordine $0, 1, 2, \dots, n$.

Alcune approx di Taylor in 0:

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + o(x^n)}$$

$\cosh(x)$ ...

$\sinh(x)$ ...

k	0	1	2	3	4	5	6
	$\cos \to$	$-\sin \to$	$-\cos \to$	$+\sin \to$	$\cos \to$	$-\sin \to$	$-\cos \to \ldots$
$f^{(k)}(0)$	1	0	-1	0	1	0	-1
Taylor:	1	$\cancel{\frac{1}{1!}\cdot 0\cdot x}$	$\frac{1}{2!}\cdot(-1)x^2$	$\cancel{\frac{1}{3!}\cdot 0\cdot x^3}$	$\frac{1}{4!}\cdot 1\cdot x^4$	$+\cancel{\frac{1}{5!}\cdot 0\cdot x^5}$	$+\frac{1}{6!}\cdot(-1)x^6+\ldots$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(x) &= \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2m}) \\ \sin(x) &= \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} + o(x^{2m+1}) \end{aligned}}$$

$$e^{iv} \cong \sum_{k=0}^{\ldots} \frac{1}{k!} (iv)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\ldots} \frac{1}{(2k)!} (-1)^k \cdot v^{2k} + \sum_{k=0}^{\ldots} \frac{1}{(2k+1)!} \cdot i \cdot (-1)^k \cdot v^{2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\ldots} \frac{(-1)^k}{(2k)!} v^{2k} + i \sum_{k=0}^{\ldots} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} v^{2k+1}$$

$$= \cos(v) + i \cdot \sin(v).$$

	0	1	2	3	4	5	
	$\log(1+x)$	$\frac{1}{1+x}$	$-\frac{1}{(1+x)^2}$	$\frac{2}{(1+x)^3}$	$-\frac{6}{(1+x)^4}$	$\frac{24}{(1+x)^5}$	$\dots$
$f^{(k)}(0)$	0	1	-1	2	-6	24	
Taylor	0	$\frac{1}{1!}\cdot x$	$-\frac{1}{2!}x^2$	$\frac{2}{3!}x^3$	$-\frac{6}{4!}\cdot x^4$	$\frac{24}{5!}\cdot x^5$	$\dots$
	0	x	$-\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{3}x^3$	$-\frac{1}{4}x^4$	$+\frac{1}{5}x^5$	$\dots$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \cdot x^k + o(x^n)$$