Ist. Mat. I – CIA
23/11/22

Parziale sul I semestre
(Analisi fino a derivazione + serie)

10/1/23	14:30	aula 22
31/1/23	14:30	aula 22

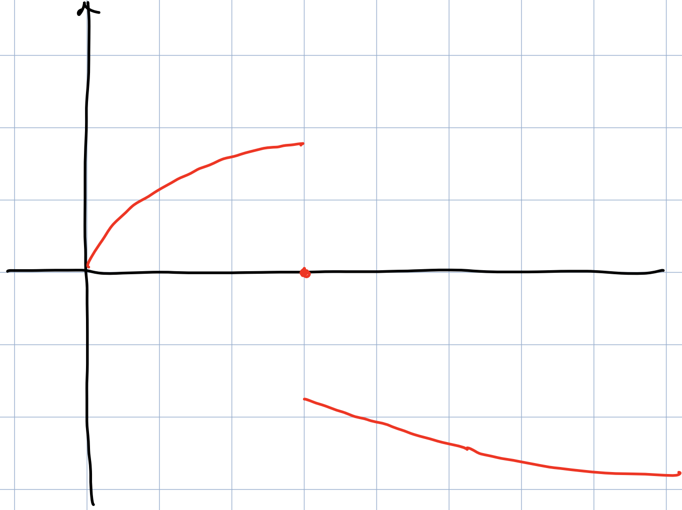
— o —

Foglio 5 – Es 2

(i) $\operatorname{sgn}(3-x)\cdot\sqrt{x}$

$D = [0,+\infty)$

$x=3$ disc.



(j) $\log(e^x-1)$

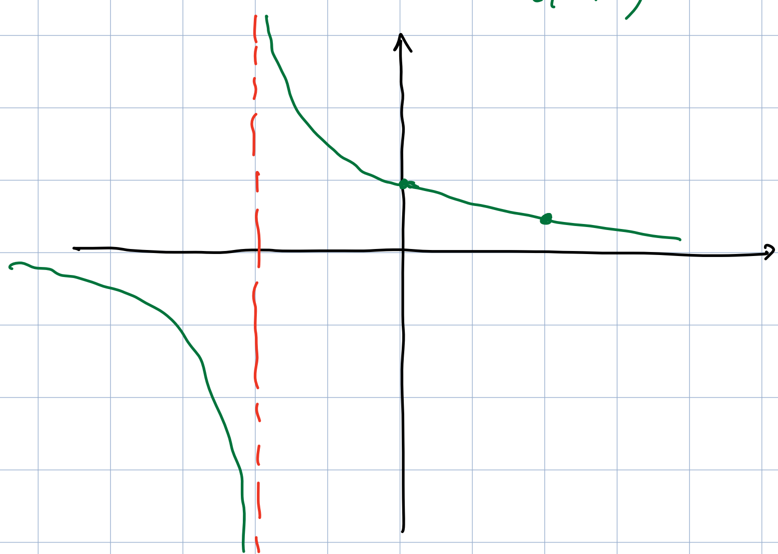
$D = \{x : e^x - 1 > 0\}$
$= \{x : e^x > 1\} = (0,+\infty)$

continua su D

(k) $\dfrac{\log|x|}{(x+1)\cdot\log(x^2)} = \dfrac{\log|x|}{(x+1)\log(|x|^2)} = \dfrac{\log|x|}{2(x+1)\cdot\log|x|}$

$D = \{x : x = -1,\ x \neq 0,\ x \neq 1\}$

Su D, $f(x) = \dfrac{1}{2(x+1)}$



disc. elim. in $x=0$
e in $x=1$

Libro Zanichelli

14. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{\sin(y)}{y} = 1$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)-1}{\sin^2(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\left(-\underbrace{\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}}_{\downarrow\ \frac{1}{2}}\cdot\left(\underbrace{\dfrac{x}{\sin(x)}}_{\downarrow\ \frac{1}{1}}\right)^2\right) = -\dfrac{1}{2}$

16. $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot \log\left(\frac{x+3}{x+1}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} x \cdot \log\left(1 + \frac{2}{x+1}\right) =$

$\frac{2}{x+1} = y$ $\qquad$ $x+1 = \frac{2}{y}$

$x \to +\infty$ $\qquad$ $x = \frac{2}{y} - 1$

$y \to 0^+$

$$= \lim_{y \to 0^+} \left(\frac{2}{y} - 1\right) \log(1+y)$$

$$= 2 \cdot \lim_{y \to 0^+} \frac{\log(1+y)}{y} - \lim_{y \to 0^+} \log(1+y)$$

$$= 2 \cdot 1 - 0 = 2$$

$$\lim_{x \to \infty} \log\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \log\left(1 + \frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2} \cdot 2 - 1}$$

$$= 2 \cdot \lim_{y \to \infty} \log\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y - \lim_{y \to \infty} \log\left(1 + \frac{1}{y}\right)$$

$$= 2 \cdot \log(e) - \log(1) = 2$$

17. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2+2}\right)^x = \exp \lim\limits_{x \to \infty} x \cdot \log\left(\frac{x^2+3}{x^2+2}\right)$

$$= \exp \lim_{x \to \infty} x \cdot \log\left(1 + \frac{1}{x^2+2}\right)$$

$y = \frac{1}{x^2+2}$ $\qquad$ $x \to +\infty$, $y \to 0^+$

$x^2 + 2 = \frac{1}{y}$

$x = \sqrt{\frac{1}{y} - 2} \cong \frac{1}{\sqrt{y}}$

$$= \exp \lim_{y \to 0^+} \frac{\log(1+y)}{\sqrt{y}}$$

$$= \exp \lim_{y \to 0^+} \underbrace{\underbrace{\frac{\log(1+y)}{y}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\sqrt{y}}_{\downarrow\, 0}}_{0} = 1$$

18. Andamento in $0^{\pm}$ di ...

$$\tan(x) \underset{0}{\cong} x \qquad \cot(x) \underset{\pm\infty}{\cong} \frac{1}{x}$$

$$\arctan(x) \underset{0}{\cong} x \qquad \arcsin(x) \underset{0}{\cong} x$$

19. $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2^{x+\frac{1}{x}} + \log|x|}{x^2+1}$$

$$+\infty \quad \cong \frac{2^x + \log(x)}{x^2} \cong \frac{2^x}{x^2} \to +\infty$$

$$-\infty \quad \cong \frac{2^x + \log(-x)}{x^2} \cong \frac{\log(-x)}{x^2} \to 0$$

20. $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\log(1+2x^2)} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\frac{2x^2}{\log(1+2x^2)}}_{\frac{1}{1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

22. $$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt{x^2+3x-2} - |x| \right)$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt{x^2+3x-2} - \sqrt{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+3x-2 - x^2}{\sqrt{x^2+3x-2} + \sqrt{x^2}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x-2}{2|x|} = \pm\frac{3}{2}$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

(24) $$\lim_{x\to 1} \frac{(\log(x))^2}{(2x-2)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{4}\left(\frac{\log(1+y)}{y}\right)^2 = \frac{1}{4} \qquad x-1=y$$

$$\downarrow$$
$$1^2$$

(27) $$\lim_{x\to +\infty} x \cdot e^{\sin(x)}$$

$$\frac{1}{e} \leq e^{\sin(x)} \leq e$$

$$\frac{1}{e}\cdot x \leq x\cdot e^{\sin(x)} \leq e\cdot x$$

$$\Longrightarrow +\infty$$

Foglio 5 – Ese 3

Stabilire se $f: I \to \mathbb{R}$ soddisfa

(W) Weierstrass — $I=[a,b]$, f continua su $[a,b]$

(Z) esistenza zeri — stesso + $f(a)\cdot f(b) \leq 0$

(a) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ $\quad f(x) = \log(1+x) + \sqrt{x} - \cos(x)$

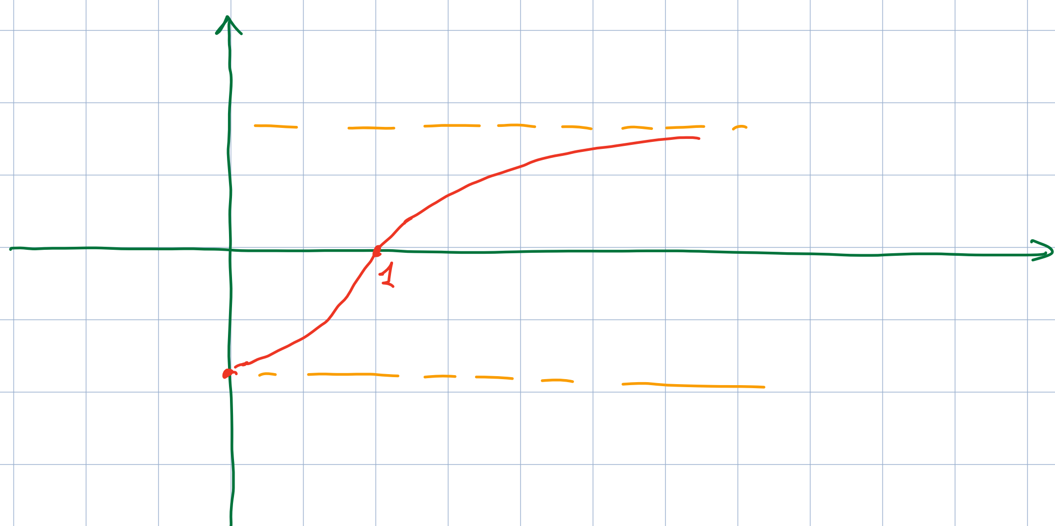
(W) Sì

(Z) $f(0) = 0+0-1 = -1$

$$f(1) = \underbrace{\log(2)}_{>0} + \underbrace{1 - \cos(1)}_{\geq 0} > 0 \qquad \text{Sì}$$

(b) $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \arctan(\log(x))$

Non si applicano W né Z.



Ha un solo zero. Posto $f_0(0) = -\frac{\pi}{2}$ si estende con continuità a $f_0 : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$;

f non ha min né max $\left(\inf f = -\frac{\pi}{2},\ \sup f = \frac{\pi}{2}\right)$

f_0 ha min $= -\frac{\pi}{2}$, no max $\left(\sup = \frac{\pi}{2}\right)$.

$$f(x) = (1+x)^a \qquad\qquad (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

α

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

$\alpha(\alpha-1)$

$\dots$

$$f^{(k)}(x) = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

$\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$

In $x=0$
$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}}_{\binom{\alpha}{k}} \cdot x^k + o(x^n)$$

Se $\alpha = m \in \mathbb{N}$
$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}$$

<u>Oss</u>: $\alpha = m \in \mathbb{N}$ ho $\binom{m}{k} = 0$ per $k > m$

Invece per $\alpha \notin \mathbb{N}$ ho $\binom{\alpha}{k} \neq 0$ $\forall k$.

Taylor con resto Peano: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è derivabile n volte in $[a,b]$ ho per $x_0 \in [a,b]$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{P_{n,x_0}(x)} + o\left((x-x_0)^n\right)$$

Taylor con resto Lagrange: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è derivabile $n+1$ volte in $[a,b]$ ho per $x_0\in[a,b]$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

dove c è compreso tra x_0 e x

$c\in[x_0,x]$ $\quad x>x_0$

$c\in[a,x_0]$ $\quad x<x_0$

Oss: per $n=0$ l'enunciato è: $\exists c$ compreso tra x_0 e x t.c.

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(c)}{1!}\cdot(x-x_0)$$

$$f'(c)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ Teorema di Lagrange

Daremo significato formale a $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ (serie)

Domanda: se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabile infinite volte

so: $\forall n$ $\quad f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$

dubbio: $\quad f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Risposta: per alcune f sì [Taylor con resto Lagrange ci consente di provarlo]

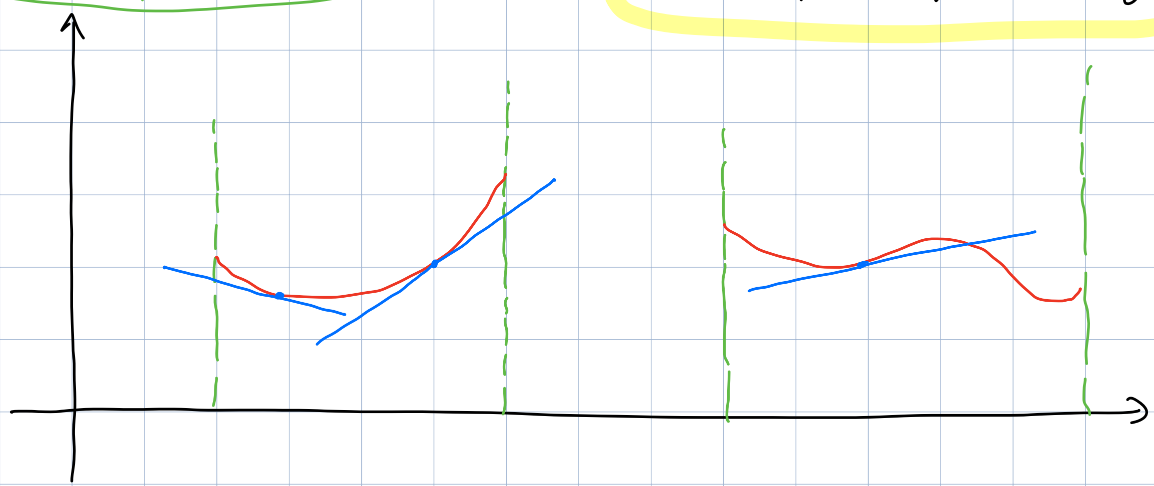
ma per altre f no.

———— o ————

Fatto: supponiamo di avere $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ derivabile due volte*. Allora

f convessa $\iff$ in ogni punto il grafico di f è sopra la tangente

* con f'' continua



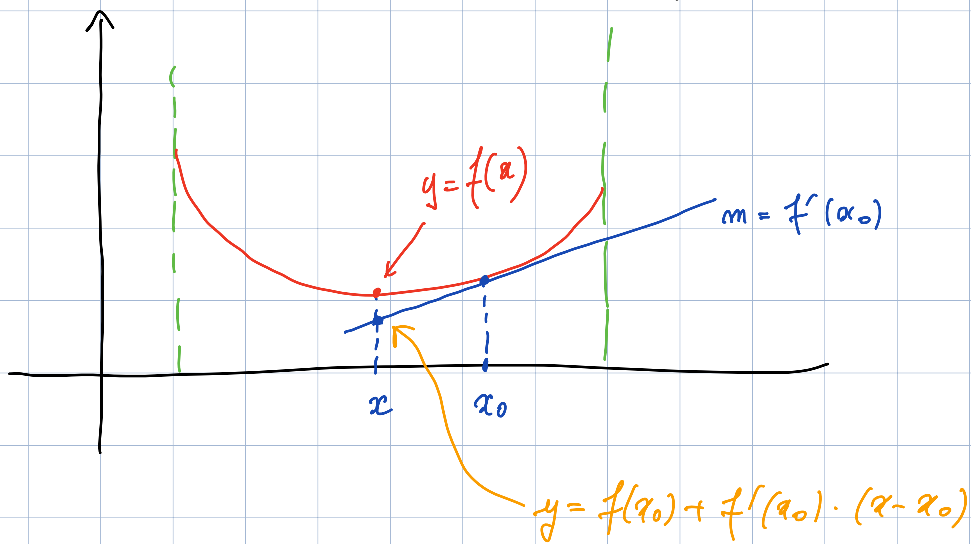
Già visto: f convessa $\iff$ f' crescente $\iff$ $f'' \geq 0$

- supponiamo $f'' \geq 0$, prendiamo $x_0 \in [a.b]$ e proviamo che grafico di f è sopra la tangente in x_0:

Taylor/Lagrange $n=1$: $\exists c$ compreso fra x_0 e x t.c.

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)}_{\text{tangente in } x_0} + \underbrace{\tfrac{1}{2} f''(c)\cdot(x-x_0)^2}_{\geq 0}$$

$\Longrightarrow f(x) \geq$ ordinata in x della tangente in x_0



- Proviamo che se il grafico di f è sempre sopra le tangenti allora $f'' \geq 0$:

Uso Taylor/Lagrange fissato x_0 e per $x \in [a,b]$, $x \neq x_0$
$\exists c$ tra x_0 e x t.c.

$$\underbrace{f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)\right)}_{\geq 0} = \frac{1}{2} f''(c) \cdot \underbrace{(x-x_0)^2}_{> 0}$$

$$\Longrightarrow f''(c) \geq 0$$

Se $x \to x_0$ ho $c \to x_0$ $\Longrightarrow$ $f''(x_0) \geq 0$.

Ricerca di zeri per funzioni monotone concave o convesse.

<u>Oss</u>: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua con $f(a) \cdot f(b) < 0$ possiamo cercarne uno zero approssimato con bisezione.

Per monotone convesse/concave metodo molto migliore; idea: linearizzare l'equazione.

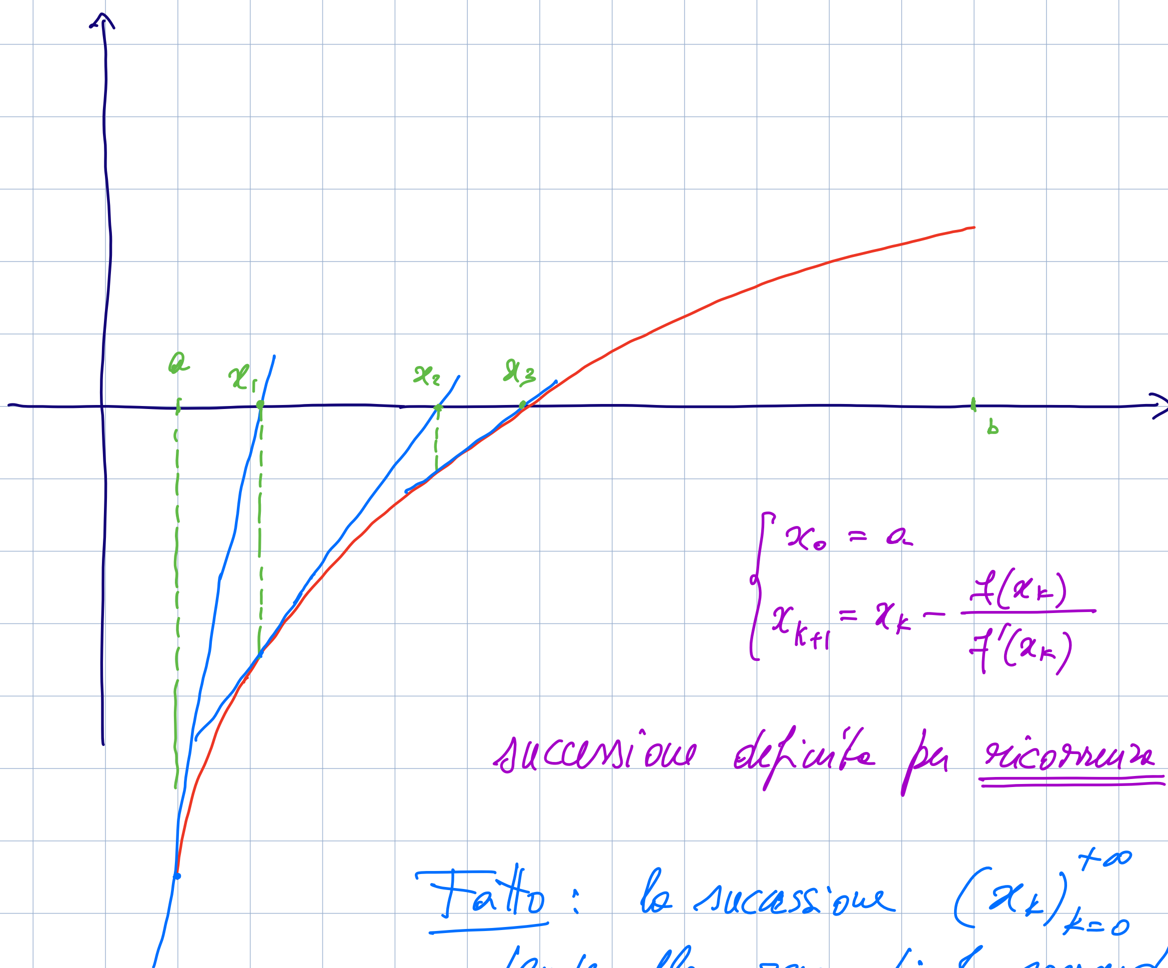
Trovare zero: risolvere $f(x) = 0$.
Punto de $x_0 \in [a,b]$ posso sostituire l'equazione $f(x) = 0$ rimpiazzando $f(x)$ con la sua approx. di Taylor nel punto x_0, cioè con la tangente in x_0:

$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = 0$$

che ha soluzione $x = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Fatto: per monotone convesse/concave questo nuovo x è una approx migliore di x_0 dello zero cercato. Dunque iterando ottengo una approx sempre migliore.

Caso crescente / concava



$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \end{cases}$$

successione definita per <u>ricorrenza</u>

<u>Fatto</u>: la successione $(x_k)_{k=0}^{+\infty}$ tende allo zero di f crescendo.