UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 10/1/23 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Per $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$ e per $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ dire se l'insieme $X=\{x\in\mathbb{K}:\ x^3<2\}$ sia inferiormente e/o superiormente limitato, indicando, nel caso e se esistono, l'estremo inferiore e/o quello superiore (in $\mathbb{K}$).

2. Lanciando 10 volte una moneta ci sono state 4 uscite di testa e 6 di croce. Quante sono le sequenze testa/croce che possono essersi realizzate?

3. Determinare la molteplicità di i come radice del polinomio
$z^4+(1-3i)z^3-(5+4i)z^2+5(i-1)z+2(1+i)$.

4. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(\sin(x)-x)\cdot\arctan(x)}{(1-\cos(x))\cdot\log\left(1+2x^2\right)}$.

5. Considerare l'espressione $f(x)=\sqrt[6]{x^5}-\sqrt[4]{1-x^3}$. Trovare il più grande $D\subset\mathbb{R}$ su cui essa definisce una funzione $f:D\to\mathbb{R}$ e l'insieme P degli $x\in D$ in cui esiste $f'(x)$. Esplicitare la formula di $f'(x)$.

6. Verificare che la funzione $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ data da $f(x)=2-x+\log(x)$ ha almeno due zeri.

7. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\left(\tfrac{3}{x}\right)\right)^{\tan\left(\frac{2}{x}\right)}$.

8. Per la funzione $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ data da $f(x)=x^2-\frac{27}{x^2}$ determinare gli intervalli di concavità e convessità.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente o un documento. I telefoni devono rimanere spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 10/1/23 — Esercizio

Considerare l'espressione $x \cdot \log(x^2)$.

(A) (1 punto) Provare che essa può essere estesa con continuità a una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(B) (1 punto) Trovare tutti gli zeri di f.

(C) (2 punti) Stabilire in quali punti la f è derivabile specificando la natura di quelli in cui non lo è.

(D) (1 punto) Trovare estremo superiore e inferiore di f.

(E) (1 punto) Trovare tutti gli asintoti del grafico di f.

(F) (3 punti) Trovare tutti i punti di massimo e minimo relativo di f.

Risposte ai quesiti

1. In entrambi i casi X non è inferiormente limitato ma lo è superiormente. Per $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ non ammette estremo superiore, per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sì ed è $\sqrt[3]{2}$

2. $\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$

3. 2

4. $-\frac{1}{6}$

5. $D = [0,1]$, $P = (0,1)$, $f'(x) = \dfrac{5}{6 \cdot \sqrt[6]{x}} + \dfrac{3x^2}{4 \cdot \sqrt[4]{(1-x^3)^3}}$

6. f è continua su entrambi gli intervalli $(0,1]$ e $[1,+\infty)$; inoltre vale 1 nell'estremo 1 e ha limite $-\infty$ nell'altro estremo di ciascuno dei due; dunque ha uno zero su ciascuno dei due

7. 1

8. Convessa su quelli contenuti in $(-\infty,-3]$ e in $[3,+\infty)$; concava su quelli contenuti in $[-3,0)$ e $(0,3]$

Soluzione dell'esercizio

(A) L'espressione è definita e continua per ogni $x \neq 0$, e ha limite 0 in 0. Dunque

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \log\left(x^2\right) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

definisce una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua

(B) 0 e ± 1

(C) Derivabile per $x \neq 0$. Flesso a tangente verticale in $x = 0$

(D) $\pm\infty$

(E) Nessuno

(F) Massimo relativo in $x = -\frac{1}{\mathrm{e}}$, minimo relativo in $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$