UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 18/7/23 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Una gelateria offre 6 gusti di gelato. Rosa prende un cono a 2 gusti e Giacomo una coppetta a 3 gusti. Quante possibilità totali di scelta ci sono per i due amici?

2. Risolvere $iz^2 + (2-i)z - (1+i) = 0$ per $z \in \mathbb{C}$.

3. Calcolare, se esiste, $\lim_{x\to 0} \dfrac{2^x - 1}{\log(1+x)}$.

4. Considerare la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + \cos(x)$. Determinare la sua immagine J e dire se f pensata come funzione da $[0,1]$ a J sia invertibile con inversa continua.

5. Determinare il più grande intervallo I su cui l'espressione $f(x) = \arcsin(1-x^2)$ definisce una funzione f. Dire per quali $x \in I$ esiste $f'(x)$ ed esibirne l'espressione.

6. Calcolare l'ordine di zero in $x = 0$ della funzione $f(x) = \log(1+x^3) \cdot (\cos(x^2) - 1)$.

7. Dire se alla funzione $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 2\sqrt{x} - x$ si applichi il teorema di Rolle.

8. Indicare il più grande intervallo I su cui l'espressione $f(x) = 2x^2 + \log(x)$ definisce una funzione f e determinare gli intervalli su cui f è concava e quelli su cui è convessa.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente o un documento. I telefoni devono rimanere spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 18/7/23 — Esercizio

Considerare l'espressione

$$f(x) = \frac{2x^2 + x}{x^2 - 1}.$$

(A) (1 punto) Determinare il più grande $D \subset \mathbb{R}$ su cui essa definisce una funzione $f : D \to \mathbb{R}$.

(B) (1 punto) Trovare tutti gli zeri di f.

(C) (3 punti) Calcolare i limiti di f agli estremi di D.

(D) (3 punti) Trovare i punti di massimo e di minimo relativo di f.

(E) (1 punto) Provare che f ha punti di flesso.

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Sul tavolo è consentito avere solo solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto dell'esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte ai quesiti

1. 300

2. $z = i,\ z = 1 + i$

3. $\log(2)$

4. La funzione $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ è decrescente su $\mathbb{R}$, mentre $x \mapsto \cos(x)$ è decrescente su $[0, \frac{\pi}{2}]$, che contiene $[0, 1]$. Dunque f è decrescente, $J = [\frac{1}{\mathrm{e}} + \cos(1), 2]$ e f pensata come funzione da $[0, 1]$ a J è invertibile. Su $[0, 1]$ la f è continua, dunque la sua inversa è continua

5. $I = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$; $f'(x)$ esiste nei punti interni escluso 0 e vale $-\dfrac{2\,\mathrm{sgn}(x)}{\sqrt{2 - x^2}}$.

6. 7

7. Sì: $f(0) = f(4)$ ed f è continua su $[0, 4]$ e derivabile su $(0, 4)$

8. $I = (0, +\infty)$; concava su quelli contenuti in $\left(0, \frac{1}{2}\right]$, convessa su quelli contenuti in $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Soluzione dell'esercizio

(A) $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

(B) $x = 0$ e $x = -\frac{1}{2}$

(C) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

(D) Minimo relativo in $x = -2-\sqrt{3}$, massimo relativo in $x = -2+\sqrt{3}$

(E) $f''(x) = \frac{2(x^3+6x^2+3x+2)}{(x^2-1)^3}$ e il polinomio al numeratore ha almeno una radice, che non è ± 1