UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte II** — Prova del 7/6/23 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Considerare la funzione $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 4 - 3x + x^2$. Determinare la minima area possibile per un plurirettangolo contenente il sottografico di f e costituito da due soli rettangoli.

2. Calcolare $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{x^2}{2x+3}\,\mathrm{d}x$.

3. Considerare la funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x + \mathrm{e}^x$. Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando nello spazio intorno all'asse x il sottografico di f.

4. Dire se la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sia invertibile e in tal caso trovarne l'inversa.

5. Trovare una base di $W^{\perp}$, con $W = \mathrm{Span}\{(1, -1, 0, 1),\ (2, 1, 1, -1)\} \subset \mathbb{R}^4$.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $y' = \dfrac{e^{2y}}{x^3}$ che soddisfa $y(1) = 1$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato dopo i primi 45 minuti. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.

Considerare al variare di $h \in \mathbb{R}$ il sistema lineare

$$\begin{cases} (h-1)x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + hx_2 + x_3 = h+1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2h. \end{cases}$$

(A) (3 punti) Discutere al variare di h il numero delle soluzioni del sistema.

(B) (2 punto) Determinare la soluzione del sistema in funzione del parametro h quando essa è unica.

(C) (2 punti) Determinare h affinchè il sistema abbia una soluzione (x_1, x_2, x_3) che soddisfa $\langle (x_1, x_2, x_3), (1, 2, 0) \rangle = 1$.

(D) (2 punti) Detta A la matrice incompleta del sistema per $h = 1$, trovare una base dello spazio delle soluzioni di $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$.

Risposte ai quesiti

1. 6

2. $\frac{9}{4}\log(3) - 1$

3. $\pi(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^2 + \frac{11}{6})$

4. A è invertibile e $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$

5. $W^\perp = \mathrm{Span}\{(0,1,0,1),\ (1,1,-3,0)\}.$

6. $y = -\frac{1}{2}\log(x^{-2} + \mathrm{e}^{-2} - 1).$

Soluzione dell'esercizio

(A) Se $h \neq 0, 1$ la soluzione è unica. Se $h = 0$ il rango dell'incompleta è 2 e quello della completa è 3, quindi il sistema non ha soluzione. Se $h = 1$ sia l'incompleta che la completa hanno rango 2, quindi il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro

(B) $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2h+3}{h}, -1, \frac{2h^2-h-3}{h}\right)$

(C) $h = 3$; la soluzione è $(x_1, x_2, x_3) = (3, -1, 4)$

(D) Una base è data dal vettore $(2, -1, -1)$