UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte II** — Prova del 18/7/23 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Deteminare il più grande intervallo (a,b) su cui l'espressione $F(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ definisce una funzione $F : (a,b) \to \mathbb{R}$, dire in quali punti di (a,b) esiste $F'(x)$ e calcolare $F'(\sqrt{\pi})$.

2. Calcolare $\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \cdot \log(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Calcolare $\int \sqrt{3-2x}\,\mathrm{d}x$.

4. Risolvere il sistema $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 3. \end{cases}$

5. Calcolare il determinante della matrice $A \cdot B$, con $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. In $\mathbb{R}^4$, con il prodotto scalare standard, trovare l'angolo convesso θ compreso tra i vettori $v = (1,2,0,-2)$ e $w = (1,5,-3,1)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato dopo i primi 45 minuti. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte II** — Prova del 18/7/23 — Esercizio

Considerare l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$F(e_1) = (2, -1), \qquad F(e_2) = (1, 1), \qquad F(2e_3) = (1, 0),$$

con (e_1, e_2, e_3) la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(A) (2 punti) Trovare una base di $\mathrm{Ker}(F)$.

(B) (2 punti) Determinare la dimensione di $\mathrm{Im}(F)$.

(C) (1 punto) Dire se F sia iniettiva, suriettiva o biiettiva.

(D) (3 punti) Scrivere la matrice $A_{C,B}$ del cambiamento di base, con $B = ((1, 1), (2, -1))$ e C la base canonica di $\mathbb{R}^2$. (Seguendo la convenzione adottata a lezione, $A_{C,B}$ è la matrice associata all'identità fissata la base C sul dominio e la base B sul codominio.)

(E) (1 punto) Trovare le coordinate di $F(e_1 + e_2)$ rispetto alla base B.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto dell'esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte ai quesiti

1. $(a, b) = (-\infty, +\infty)$; $F'(x)$ esiste per ogni $x \in (-\infty, +\infty)$; $F'\left(\sqrt{\pi}\right) = -1$

2. $\frac{1}{9}(2\,\mathrm{e}^3 + 1)$

3. $-\frac{1}{3}\sqrt{(3-2x)^3} + c$

4. Le soluzioni sono $\{(3-t, 1+t, t):\ t \in \mathbb{R}\}$

5. $\det(A \cdot B) = 30$

6. $\cos(\theta) = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} = \dfrac{9}{3 \cdot 6} = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$

Soluzione dell'esercizio

(A) $\operatorname{Ker}(F) = \operatorname{Span}\{(1, 1, -6)\}$

(B) $\dim \operatorname{Im}(F) = 2$

(C) F è suriettiva e non iniettiva

(D) $A_{C,B} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(E) $A_{C,B} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$