UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte II** — Prova del 22/5/23 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Considerare la funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 3 + x - x^2$. Determinare la massima area possibile per un plurirettangolo contenuto nel sottografico di f e costituito da due soli rettangoli.

2. Calcolare $\int \frac{x^3-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

3. Calcolare $\int_1^2 (x + 1)\log(x)\,\mathrm{d}x$.

4. Sia $W = \mathrm{Span}\{(1, -1, 0, 1),\ (0, -1, 2, 1),\ (-1, -1, 4, 1),\ (-1, 1, 0, -1)\}$.
Calcolare la dimensione di W.

5. Risolvere il sistema lineare
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 + x_4 = -1 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

6. Trovare soluzioni singolari e la soluzione generale dell'equazione differenziale $y' = -\frac{y^2}{x}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato dopo i primi 45 minuti. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte II** — Prova del 22/5/23 — Esercizio

Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$F(e_1) = 4e_1 - 2e_3, \quad F(e_2) = -2e_1 + e_2, \quad F(e_3) = -2e_1 - e_2 + 2e_3$$

con (e_1, e_2, e_3) base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(A) (1 punto) Scrivere la matrice A associata a F rispetto alla base canonica su dominio e codominio.

(B) (1 punto) Determinare la dimensione di $\mathrm{Ker}(F)$.

(C) (2 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di A.

(D) (2 punti) Trovare gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica e geometrica.

(E) (3 punti) Dire se la matrice A sia diagonalizzabile e in tal caso trovare una matrice invertibile M tale che $M^{-1} \cdot A \cdot M$ sia diagonale.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto dell'esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte ai quesiti

1. 4

2. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 2\log(x+1) + c$

3. $4\log(2) - \frac{7}{4}$

4. $\dim W = 2$. Una base è data dai primi due vettori

5. Le soluzioni sono della forma $x_1 = -t - 1,\ x_2 = 4t + 8,\ x_3 = 3t + 4,\ x_4 = t$ con $t \in \mathbb{R}$

6. La funzione costante $y(x) = 0$ (definita per $x \neq 0$) è soluzione singolare. La soluzione generale è $y(x) = \frac{1}{\log(|x|)+c}$, con $c \in \mathbb{R}$

Soluzione dell'esercizio

(A) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(B) $\dim(\mathrm{Ker}(F)) = 3 - \mathrm{rk}(A) = 1$

(C) $P_A(t) = -t^3 + 7t^2 - 10t = -t(t-2)(t-5)$

(D) Gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 5$, tutti con molteplicità sia algebrica sia geometrica uguale a 1

(E) A è diagonalizzabile perché ha 3 autovalori distinti. Una tale matrice è $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$