IN SUPREMÆ DIGNITATIS
1343

Istituzioni di Matematica I — **Parte II** — Prova del 23/5/23 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Calcolare $\int \mathrm{e}^{-x} \cdot \sin(2x)\,\mathrm{d}x$.

2. Calcolare $\int \tan(2x)\,\mathrm{d}x$.

3. Calcolare il determinante di $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Trovare una base di $\mathbb{R}^4$ che contenga i vettori $v_1 = (1, -1, 1, 0)$ e $v_2 = (-1, 1, 0, 0)$.

5. Posto $W = \mathrm{Span}\{(1, 2, 0),\ (1, -1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$, trovare una base di $W^\perp$.

6. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $y' = y + e^x$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato dopo i primi 45 minuti. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte II** — Prova del 23/5/23 — Esercizio

Considerare al variare di $h, k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} hx_1 - x_2 = k \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -3x_1 + hx_2 - 2hx_3 = 0. \end{cases}$$

(A) (3 punti) Discutere al variare di h e k il numero delle soluzioni del sistema.

(B) (2 punti) Definire W_1 come l'insieme delle soluzioni del sistema per $h = -1$ e $k = 0$. Provare che W_1 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ ed esibirne una base.

(C) (1 punto) Trovare un elemento $w \in W_1$ con $\|w\| = 2\sqrt{3}$.

(D) (2 punti) Posto $W_2 = \text{Span}\{(2, -1, 0),\ (1, 0, -1)\}$, trovare una base di $W_1 + W_2$.

(E) (1 punto) Calcolare la dimensione $W_1 \cap W_2$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto dell'esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte II** — Prova del 23/5/23 — Quesiti

Risposte ai quesiti

1. $-\frac{1}{5}\,\mathrm{e}^{-x}\cdot(2\cos(2x)+\sin(2x))+c$

2. $-\frac{1}{2}\log(\cos(2x))+c$

3. $\det(A)=12$

4. Ad esempio $B=(v_1,v_2,v_3,v_4)$ con $v_3=(1,0,0,0)$ e $v_4=(0,0,0,1)$

5. $W^{\perp}=\mathrm{Span}\{(2,-1,-3)\}$

6. $y(x)=(x+c)e^{x}$, con $c\in\mathbb{R}$

Soluzione dell'esercizio

(A) La matrice incompleta ha determinante $-(h+1)(h+3)$. Se $h=-1,-3$ il rango della incompleta è 2. In questo caso il rango della completa è uguale a 2 se $k=0$ e uguale a 3 se $k\neq 0$. Se $h\neq -1,-3$ il rango dell'incompleta è uguale a 3. Quindi se $h\neq -1,-3$ il sistema ha un'unica soluzione per ogni k. Se $h=-1$ o $h=-3$ e $k\neq 0$ il sistema è impossibile. Se $h=-1$ o $h=-3$ e $k=0$ il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro.

(B) Il sistema è omogeneo. $W_1 = \mathrm{Span}\{(1,-1,1)\}$

(C) $w=(2,-2,2)$

(D) $W_1+W_2=W_2=\mathrm{Span}\{(2,-1,0),\ (1,0,-1)\}$

(E) $W_1\subseteq W_2$, quindi $\dim(W_1\cap W_2)=1$