UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

Modulo di “Geometria” — Scritto del 9/1/24 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} -1 & k+1 \\ -k^3-1 & k^3+k+1 \end{pmatrix}$ risulta diagonalizzabile.

2. In $\mathbb{R}^2$ considerare il prodotto scalare $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ con $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ e la norma associata. Trovare tutti i vettori ortogonali a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a tale prodotto scalare e unitari rispetto a tale norma.

3. Trovare l'intersezione tra il luogo $\{[t+2 : -t : t+1] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : \ t \in \mathbb{R}\}$ e l'insieme dei punti all'infinito del luogo in $\mathbb{R}^3$ di equazione $x^3 + 4xyz - 2zy^2 - y^3 - 7x^2 + 8yz - 3y + 1 = 0$.

4. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $2x^2+2y^2+5z^2-2xy-4xz-2yz+2x-2z=0$.

5. Trovare i $k \in \mathbb{R}$ per cui esiste $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ con $M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Per la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x,y) = \cos(x+2y) - \mathrm{e}^{3x-y}$ determinare la matrice hessiana nel punto $(0,0)$ e i segni dei suoi autovalori.

7. Per la curva $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2-t \\ -t^2 \end{pmatrix}$ calcolare $\int_\alpha \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

Modulo di "Geometria" — Scritto del 9/1/24 — Esercizî

1. Al variare di $z \in \mathbb{C}$ considerare la matrice $M = \begin{pmatrix} \sqrt{6}+2+i & 1+i \\ z & \sqrt{6}-2+i \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Determinare l'unico valore di z per il quale esiste $T \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ unitaria tale che $T^{-1} \cdot M \cdot T$ sia una matrice diagonale D.

(B) (4 punti) Trovare una matrice D come nel punto (A).

(C) (4 punti) Trovare una matrice T come nel punto (A).

2. Considerare la curva $\alpha : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(s) = \begin{pmatrix} s+\cos(2s) \\ s-\log(s+1) \\ s^3+s^2-3s \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Provare che α è regolare.

(B) (4 punti) Determinare il riferimento di Frénet di α nel punto $s = 0$.

(C) (4 punti) Calcolare curvatura e torsione di α nel punto $s = 0$.

(D) (3 punti) Calcolare $\int_\beta z \, \mathrm{d}y$ dove β è la restrizione di α a $[0, 1]$.

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

Modulo di "Geometria" — Scritto del 9/1/24 — Quesiti

Risposte ai quesiti

1. $k \neq 0, 1$

2. $\pm\frac{1}{2\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. $\{[1:1:0],\ [0:2:-1],\ [3:-1:2]\}$

4. Ellissoide

5. $k = \pm 2\sqrt{3}$

6. $\begin{pmatrix} -10 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$; negativi

7. $-\frac{\pi}{4}$

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

Modulo di "Geometria" — Scritto del 9/1/24 — Esercizî

Soluzioni degli esercizî

1.

(A) $z = 1 - i$

(B) $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i + 2\sqrt{6} \end{pmatrix}$

(C) $T = \frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}} \begin{pmatrix} 2-\sqrt{6} & 1+i \\ 1-i & \sqrt{6}-2 \end{pmatrix}$

2.

(A) La seconda componente di $\alpha'(s)$ si annulla solo per $s = 0$, ma le altre non si annullano per $s = 0$

(B) $t = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $n = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b = \frac{1}{\sqrt{110}} \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$

(C) $\kappa = \frac{1}{10}\sqrt{11}$, $\tau = -\frac{7}{55}$

(D) $\frac{7}{4} - 3\log(2)$