UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

Modulo di "Geometria" — Scritto del 26/1/24 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Data $A \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ con $\mathrm{tr}(A) = -3$ e $\det(A) = 5$, trovare il suo polinomio caratteristico $p_A(t) = t^3 + \dots$ sapendo che $p_A(-2) = 1$.

2. Trovare i $k \in \mathbb{R}$ per cui esiste $M \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ con $M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{3} & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Trovare l'intersezione tra il luogo $\{[t+1 : t+2 : -t] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : \ t \in \mathbb{R}\}$ e l'insieme dei punti all'infinito del luogo in $\mathbb{R}^3$ di equazione $y^3 - z^3 + 4xyz - 2xz^2 - 13z^2 + 4xy - 2y + \sqrt{2} = 0$.

4. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $2x^2+3z^2-2xy-4xz+2yz+2x-4y+2z-2 = 0$.

5. Per la curva orientata $\alpha : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t - \log(t) \\ t^2 \end{pmatrix}$ determinare per ogni t il segno della curvatura.

6. Stabilire per quali $k, h \in \mathbb{R}$ risulta esatta la forma
$\mathrm{e}^{2x^3y^2-3x^2y^3} \cdot ((6x^2y^2 + kxy^3)\,\mathrm{d}x + (hx^3y - 9x^2y^2)\,\mathrm{d}y)$.

7. Calcolare $\displaystyle\int_\alpha (y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)$ dove $\alpha : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ è la curva data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 3t + \sin(t) \\ 2t - \cos(t) \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

Modulo di "Geometria" — Scritto del 26/1/24 — Esercizî

1. Considerare la matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Provare che esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di M.

(B) (2 punti) Provare che la forma bilineare $\langle \cdot | \cdot \rangle_M$ associata ad M è un prodotto scalare.

(C) (3 punti) Trovare un generatore unitario rispetto a $\langle \cdot | \cdot \rangle_M$ della retta ortogonale rispetto a $\langle \cdot | \cdot \rangle_M$ al piano generato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(D) (3 punti) Trovare gli autovalori di M sapendo che uno di essi è intero.

(E) (3 punti) Trovare una base come nel punto (A).

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $M = \begin{pmatrix} k & k^2 - k - 2 \\ -k - 1 & k^2 + k - 1 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Trovare i valori di k per cui M ha l'autovalore 1.

(B) (2 punti) Provare che M è diagonalizzabile per $k = -2$ e trovarne gli autovalori e una base che la diagonalizza.

(C) (2 punti) Trovare il polinomio caratteristico di M.

(D) (3 punti) Al variare di k trovare gli autovalori di M, sapendo che uno di essi ha la forma $ak + b$ e l'altro $ck^2 + d$ con a, b, c, d interi indipendenti da k.

(E) (3 punti) Stabilire per quali k la M è diagonalizzabile.

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Modulo di "Geometria" — Scritto del 26/1/24 — Quesiti

Risposte ai quesiti

1. $p_A(t) = t^3 + 3t^2 - t - 5$

2. $k = \pm 2\sqrt{2}$

3. $\{[0:1:1],\ [-1:0:2],\ [2:3:-1],\ \}$

4. Iperboloide iperbolico (a una falda)

5. Concorde con $t - 2$

6. $k = -6,\ h = 4$

7. $-4(\pi + 2)$

Soluzioni degli esercizî

1.

(A) È simmetrica.

(B) $d_1 = 5 > 0,\ d_2 = 9 > 0,\ d_3 = 28 > 0$

(C) $\frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(D) $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 5 + \sqrt{11},\ \lambda_3 = 5 - \sqrt{11}$

(E) $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{22 - 6\sqrt{11}}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 - \sqrt{11} \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \frac{1}{\sqrt{22 + 6\sqrt{11}}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 + \sqrt{11} \\ 1 \end{pmatrix}$

2.

(A) $k = 0$ e $k = \pm\sqrt{3}$

(B) $\lambda_1 = 2,\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda_2 = -3,\ v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix},$

(C) $p_M(t) = t^2 - (k^2 + 2k - 1)t + (2k^3 + k^2 - 4k - 2)$

(D) $\lambda_1 = 2k + 1,\ \lambda_2 = k^2 - 2$

(E) $k \neq 3$