Ist. Mat. I - CIA
5/10/23

Per dimostrare $\mathcal{P}(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$:

<u>INDUZIONE</u> : PB Dimostro $\mathcal{P}(0)$
PI Dimostro $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$

<u>INDUZIONE COMPLETA</u> : PB Dimostro $\mathcal{P}(0)$
PI Dimostro
$\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$

(6f) … divisibile per 11 si fa con <u>induzione</u>.

<u>Esercizio</u>: dimostrare che ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ è prodotto di numeri primi.

<u>Induzione completa</u>: PB $n = 2$ "2 è prodotto di primi" sì

PI Suppongo che $2, 3, 4, \dots, n$ siano prodotto di primi.
Devo vedere che $n+1$ è prodotto di primi.

$n+1$ primo? → sì <u>ok</u>
→ no: $n+1 = k \cdot h$ $2 \leq k, h \leq n$
Per ipotesi k, h sono prodotti di primi
$\Rightarrow$ anche $k \cdot h = n+1$. $\boxtimes$

Es: per induzione non funziona:

$n = 98 \qquad n = 2 \cdot 7 \cdot 7$

$n+1 = 99$ non primo $\qquad n+1 = 9 \cdot 11$, $9 = 3 \cdot 3$

---

7 Dire se f è iniettiva / surgettiva

(d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = 17x - 42$

iniettiva: sapendo che $f(x_1) = f(x_2)$ concludo che $x_1 = x_2$?

$\cancel{17}x_1 \cancel{-42} = \cancel{17}x_2 \cancel{-42}$ sì

surgettiva: ogni $y \in \mathbb{R}$ è $y = f(x)$?

Devo trovare x t.c. $17x - 42 = y$

$x = \frac{y+42}{17}$. sì

In realtà: bigettiva? per ogni $y \in \mathbb{R}$ esiste unico x t.c. $f(x) = y$? Sì: $x = \frac{y+42}{17}$

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f^{-1}(y) = \frac{y+42}{17}$

(e) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = 17x - 42$

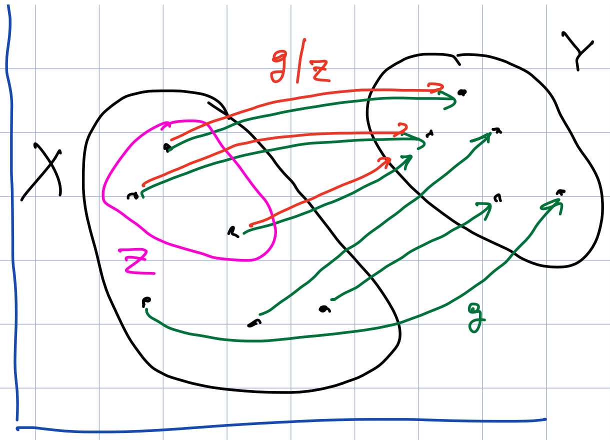
iniettiva? Sì: la restrizione di una iniettiva è sempre iniettiva.

Se $g: X \to Y$ è funzione e ho $Z \subset X$ chiamo restrizione di g a Z la $g|_Z : Z \to Y$, $z \mapsto g(z)$.

surgettiva? Ogni $y \in \mathbb{R}$ è $y = f(x)$ con $x \in \mathbb{Z}$?

$y = 17x - 42 \qquad x = \dfrac{y+42}{17}.$

No: $y = 0$: $\nexists\, x \in \mathbb{Z}$.



(f) $\{2, 3, 5, 6, 15, 25\} \to \{0, 1, \dots, 6\}$

$n \longmapsto$ resto $n : 7$

$2 \longmapsto 2$
$3 \longmapsto 3$
$5 \longmapsto 5$
$6 \longmapsto 6$
$15 \longmapsto 1$
$25 \longmapsto 4$

iniettiva

non surgettiva $0 \notin \mathrm{Im}(f)$

$$\boxed{\begin{array}{l} f : X \to Y \\ \mathrm{Im}(f) = \{ f(x) : x \in X \} \end{array}}$$

(g) $f : \{\text{mesi}\} \to \{a\ d\ f\ g\ l\ m\ n\ o\ s\}$

$x \longmapsto$ iniziale di x

g f m a m g l a s o n d

non iniettiva   surgettiva

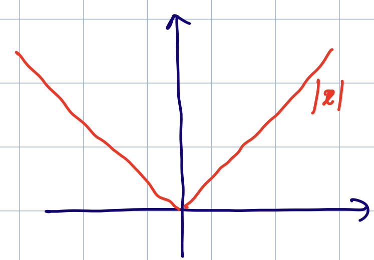
(8) (a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{|x|}$

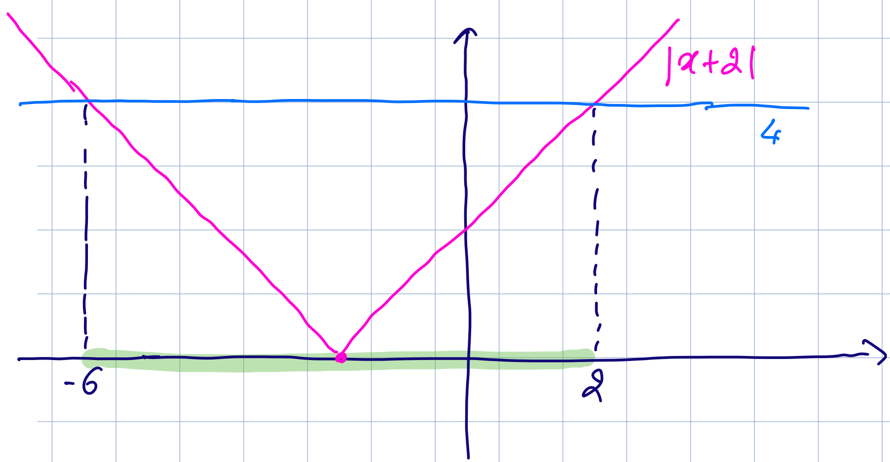
$\mathrm{Im}(f) = \{-1, +1\}$

(b) Risolvere $|x+2| \leq 4$

Equivale a $-4 \leq x+2 \leq 4$

$-6 \leq x \leq 2$.





(c) Risolvere $|x+2| \leq x$

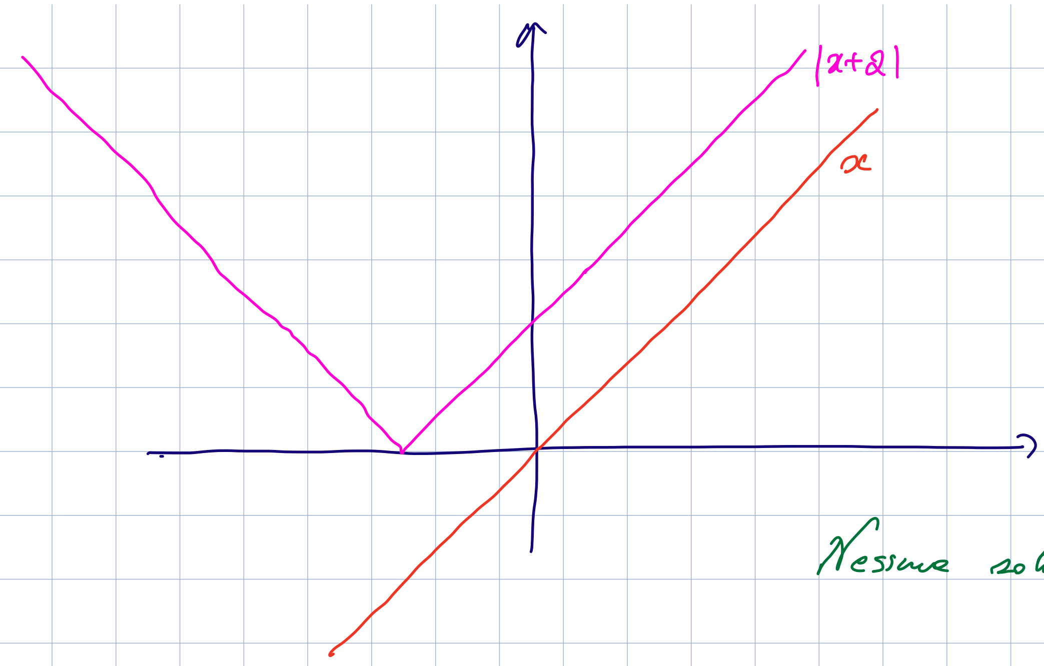
$\cancel{-x \leq x+2 \leq x}$ $\qquad -|x| \leq x+2 \leq |x|$

Se vale $|x+2| \leq x$ certamente $x \geq 0$

$\Rightarrow x+2 \geq 0 \Rightarrow |x+2| = x+2$

Diseq: $x+2 \leq x \qquad 2 \leq 0$ falsa

Nessuna soluzione.



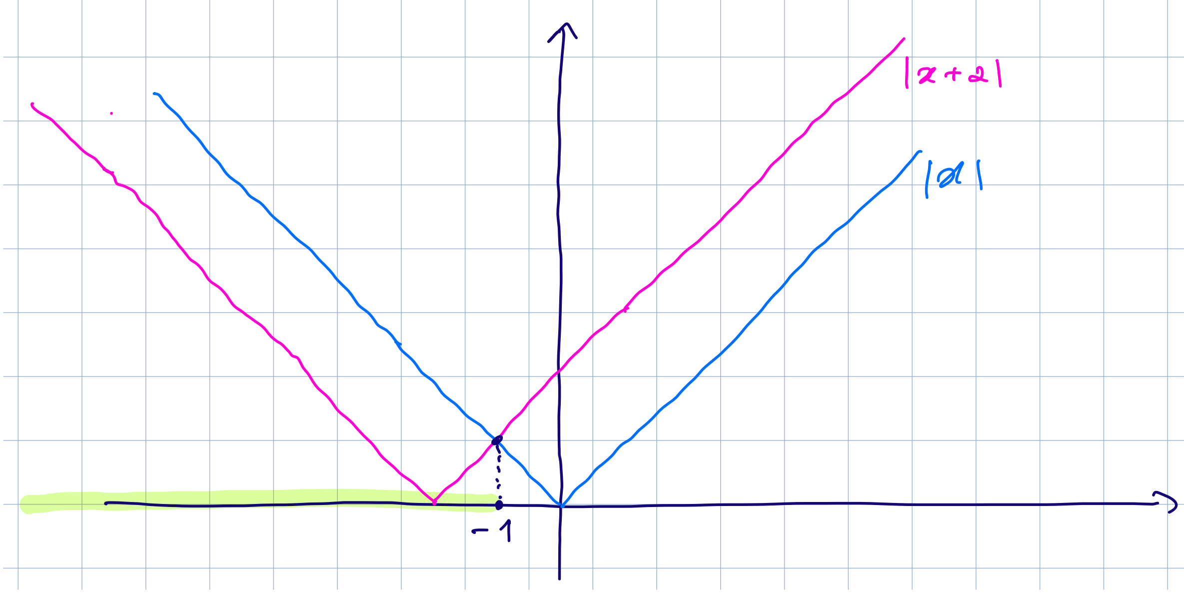
$|x+2| \leq x$

Nessuna soluz.

(d) $|x+2| \leq |x|$

$x \leq -2$	$-\cancel{x} - 2 \leq \cancel{-x}$	sempre vera
$-2 \leq x \leq 0$	$x + 2 \leq -x$	$x \leq -1$
$x \geq 0$	$\cancel{x} + 2 \leq \cancel{x}$	sempre falsa

Soluzione $x \leq -1$.



$x \leq -1$

(f) ordinare $\frac{7}{5}$, $\frac{2^4}{3^2}$, $\frac{12}{9}$, $1{,}2\overline{8}$

$$\frac{7}{5} \qquad \frac{16}{9} \qquad \frac{4}{3} \qquad \frac{128-12}{90} = \frac{116}{90} = \frac{58}{45}$$

$$1.4 \qquad 1.\overline{7} \qquad 1.\overline{3} \qquad 1.2\overline{8}$$

$$\frac{58}{45} < \frac{4}{3} < \frac{7}{5} < \frac{16}{9}$$

$58 \cdot 3 < 45 \cdot 4$ $\qquad 4 \cdot 5 < 3 \cdot 7$ $\qquad 7 \cdot 9 < 5 \cdot 16$

$174 < 180$ ✓

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

aggiunto soluz. di $x+7=0$ $\qquad$ aggiunto soluz. di $x \cdot 53 = 1$ $\qquad$ aggiunto soluz. di $x^2 = 2$

Chiamo $\mathbb{R}[t]$ l'insieme dei polinomi nella indeterminata t a coeff reali = somme di monomi cioè del tipo $\alpha \cdot t^k$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.

Es: $7 + \frac{14}{5} t - \sqrt{19} \cdot t^9$

$x^2 - 2 = 0$ equaz. polinomiale di grado 2 che ha 2 soluzioni $(\pm\sqrt{2})$ in $\mathbb{R}$.

Tutte le equaz. polinomiali hanno soluz. in $\mathbb{R}$?

No : $x^2 + 1 = 0$.

Idea :
- introdurre $i \notin \mathbb{R}$ unità immaginaria t.c. $i^2 = -1$.
- trattarlo come numero, facendo le operazioni

$$\left.\begin{array}{ll} a+i & a\in\mathbb{R} \\ b\cdot i & b\in\mathbb{R} \\ \boxed{a+b\cdot i} & a,b\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \text{nuovi}$$

$$(a+b\cdot i)+(c+d\cdot i) = \boxed{(a+c)+(b+d)\cdot i}$$

$$\begin{aligned}(a+b\cdot i)\cdot(c+d\cdot i) &= a\cdot(c+d\cdot i)+b\cdot i\,(c+d\cdot i) \\ &= a\cdot c + a\cdot d\cdot i + b\cdot i\cdot c + b\cdot i\cdot d\cdot i \\ &= a\cdot c + a\cdot d\cdot i + b\cdot c\cdot i + b\cdot d\cdot i^2 \\ &= \boxed{(a\cdot c - b\cdot d)+(a\cdot d + b\cdot c)\cdot i}\end{aligned}$$

Insieme dei numeri complessi $\mathbb{C} = \{a+b\cdot i \ : \ a,b\in\mathbb{R}\}$

convenendo $a+0\cdot i = a$ dunque $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

$0+b\cdot i = b\cdot i$.

Se $z = a+b.i$ chiamo $a\in\mathbb{R}$ parte reale

$b\in\mathbb{R}$ parte immaginaria

non $b.i$

Visto: ci sono

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(a+b\cdot i)+(c+d\cdot i) = (a+c)+(b+d)\cdot i$$

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(a+b\cdot i)\cdot(c+d\cdot i) = (a\cdot c - b\cdot d)+(a\cdot d+b\cdot c)\cdot i$$

Campo: $\mathbb{K}$ con $+, \cdot : \mathbb{K}\times\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ con 9 proprietà

1-4 0 neutro $+$, opposti, assoc $+$, comm $+$

5-8 1 neutro $\cdot$, inversi $\neq 0$, assoc $\cdot$, comm $\cdot$

9 distributiva.

Teo: $\mathbb{C}$ con $+,\cdot$ di sopra è un campo.

Dimo: tutte facili tranne la 6 (esistenza z^{-1} se $z\neq 0$).

4: $+$ è commutativo

$$(a+b\cdot i)+(c+d\cdot i) \overset{?}{=} (c+d\cdot i)+(a+b\cdot i)$$

$$= (\underbrace{a+c}) + (\underbrace{b+d})\cdot i \qquad = (\underbrace{c+a}) + (\underbrace{d+b})\cdot i$$

comm + in $\mathbb{R}$

...

Sì

9. $z = a + b\cdot i$
$w = c + d\cdot i$
$u = e + f\cdot i$

$$z\cdot(w+u) = z\cdot w + z\cdot u$$

sostituire .....

6. Dato $z \neq 0$ verifico che esiste z^{-1}
cioè un numero w t.c. $w\cdot z = 1$

$z = a + b\cdot i$; $z \neq 0 = 0 + 0\cdot i$ cioè
$a \neq 0$ oppure $b \neq 0$

cerco $w = c + d\cdot i$ t.c. $w\cdot z = 1$ cioè

$$(c + d\cdot i)\cdot(a + b\cdot i) = 1$$

$$(c\cdot a - d\cdot b) + (c\cdot b + d\cdot a)\cdot i = 1 = 1 + 0\cdot i$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \begin{cases} c\cdot a - d\cdot b = 1 \\ c\cdot b + d\cdot a = 0 \end{cases}$$

[a, b dati non entrambi nulli ; c, d incognite]

$$a\cdot \mathrm{I} + b\cdot \mathrm{II} \rightsquigarrow c\cdot a^2 - \cancel{a\cdot d\cdot b} + c\cdot b^2 + \cancel{b\cdot d\cdot a} = a\cdot 1 + b\cdot 0$$

$$c\cdot(a^2+b^2) = a$$

$$-b\cdot \mathrm{I} + a\cdot \mathrm{II} \rightsquigarrow \cancel{-b\cdot c\cdot a} + d\cdot b^2 + \cancel{a\cdot c\cdot b} + d\cdot a^2 = -b\cdot 1 + a\cdot 0$$

$$d\cdot(a^2+b^2) = -b$$

Dunque la soluz. se c'è è $\boxed{c = \dfrac{a}{a^2+b^2} \qquad d = \dfrac{-b}{a^2+b^2}}$

cioè $\quad w = \dfrac{a - b\cdot i}{a^2+b^2}$. / Viceversa sostituendo tali c e d si vede che sono soluzione. $\blacksquare$

ha senso poiché $a^2+b^2 \neq 0$ (anzi $a^2+b^2>0$)

Fatto: $\quad z = a+b\cdot i \neq 0 \implies z^{-1} = \dfrac{a-b\cdot i}{a^2+b^2}$

Es. $\quad (7-4i)\cdot(2+5\cdot i)$

$= 14 + 35i - 8i + 20$

$= 34 + 27i$

Es: $\quad (7-4i)^{-1} = \dfrac{7+4i}{49+16} = \dfrac{7+4i}{65}$

Verifico: $\quad (7-4i)\cdot\dfrac{7+4i}{65} = \dfrac{49+28i-28i+16}{65} = 1$

D'ora in poi $\quad a+b\cdot i \longleftrightarrow a+ib$

$$z = a+ib \neq 0 \implies z^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

Chiamo <u>coniugato</u> di $z = a+ib$ il numero $\bar{z} = a-ib$

Chiamo <u>modulo</u> di $z = a+ib$ il numero $|z| = \sqrt{a^2+b^2} \geq 0$

Formula: $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

Verifica ulteriore: $z \cdot \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = 1$

cioè $\boxed{z \cdot \overline{z} = |z|^2}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

$$\underbrace{(a+ib)(a-ib)}_{\substack{a^2-(ib)^2 \\ a^2+b^2}} = a^2+b^2$$

Se $z = a+ib \in \mathbb{C}$

parte reale $\mathrm{Re}(z) = a = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$

$\mathrm{Im}(z) = b = \frac{1}{2i}(z-\overline{z}) = -\frac{i}{2}(z-\overline{z})$

<u>Oss</u>: $\dfrac{1}{i} = -i$