Ist. Mat. I - CIA
11/10/23

$\mathbb{C}$ $\quad z = a+ib$

campo $\quad + \quad (a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc)$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

$$z = \rho \cdot (\cos(\vartheta) + i \cdot \sin(\vartheta)) = \rho \cdot e^{i\vartheta}$$

$$e^{i(\vartheta+\varphi)} = e^{i\vartheta} \cdot e^{i\varphi}.$$

$\mathbb{R}[x]$ = pol. in x a coeff.

Non tutti i $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ hanno radici (soluzioni di $p(x)=0$) in $\mathbb{R}$: x^2+1
+ molti altri $\quad x^4+1 \quad x^2+2x+2 \quad \ldots$

$\mathbb{C}[z]$ = polinomi a coeff. in $\mathbb{C}$ = somme di monomi
$\alpha \cdot z^k \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{N}$

Esempio : $\underbrace{(1+i)}_{z^0} + (\sqrt{3}-7i) z^2 + (\sqrt[3]{47}+2i) z^5$

Fatto: • $\mathbb{C}[z] \supset \mathbb{C}$

• le operazioni di $\mathbb{C}$ si estendono a $\mathbb{C}[z]$

$+ : \mathbb{C}[z] \times \mathbb{C}[z] \longrightarrow \mathbb{C}[z]$

$\cdot : \mathbb{C}[z] \times \mathbb{C}[z] \longrightarrow \mathbb{C}[z]$

$+$: sommare monomi con stesso grado

$\cdot$: distributiva e poi come sopra

$$\big((2+i)+(3-2i)z\big)\cdot\big(i+(1-i)z\big)$$

$$= (2i-1)+(2-2i+i+1)z+(3i+2)z+(3-3i-2i-2)z^2$$

$$= (-1+2i)+(5+2i)z+(1-5i)z^2$$

Esercizio: valgono tutte e 9 le proprietà di campo tranne esistenza dell'inverso.

Ad esempio non esiste l'inverso di z:

$$\underbrace{z\cdot p(z)}\ = 1$$

• vale 0 se $p(z)=0$

• ha grado ≥ 1 se $p(z)\neq 0$.

Equazioni polinomiali:

grado 0 : ...

grado 1 : $\alpha z+\beta=0$ $\quad \alpha\neq 0$; soluz. unica $z=-\dfrac{\beta}{\alpha}$

(vero anche su $\mathbb{R}$).

grado 2: $az^2+bz+c=0$.

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \Delta = b^2-4ac$$

Su $\mathbb{R}$: $\Delta < 0$ nessuna soluz.
$\Delta = 0$ soluz. unica (due coincidenti)
$\Delta > 0$ due soluz.

Fatto: su $\mathbb{C}$ ci sono sempre due soluz. (magari coinc.)
Ragione: se $\Delta \neq 0$ ammette radice quadrata $\neq 0$ (due: lei + opposta).

<u>Esempio</u>: $(1+2i)z^2+(1+6i)z+(1-3i)=0$.

$$\begin{aligned}\Delta &= (1+6i)^2-4(1+2i)(1-3i)\\ &= 1+12i-36-4+12i-8i-24\\ &= -63+16i\end{aligned}$$

Cerco le due radici quadrate di Δ come $\pm(\alpha+i\beta)$:
voglio $(\alpha+i\beta)^2=\Delta$ cioè
$\alpha^2+2i\alpha\beta-\beta^2=\Delta$ cioè

$$\begin{cases}\alpha^2-\beta^2=-63\\ \alpha\cdot\beta = 8\end{cases}$$

PRINCIPIO: se dò un esercizio è perché si può risolvere

$\alpha=1 \qquad \beta=8$

$$z_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-6i\pm(1+8i)}{2(1+2i)}$$

$$\frac{2i}{2(1+2i)} = \frac{i(1-2i)}{5} = \frac{2+i}{5}$$

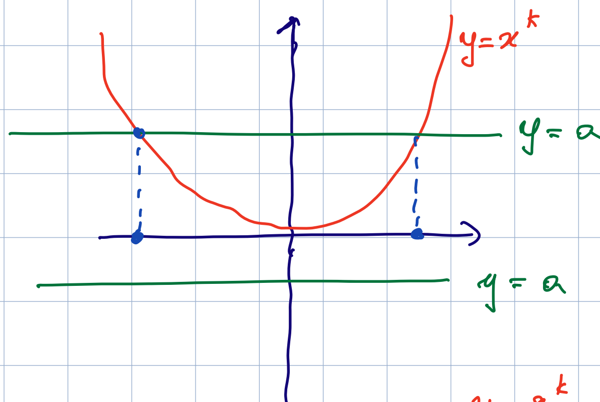
$$\frac{-2-14i}{2(1+2i)} = -\frac{(1+7i)(1-2i)}{5} = -\frac{15+5i}{5} = -3-i$$

$$w^{-1} = \frac{\bar{w}}{|w|^2}$$

Equazione $x^k = a$ su $\mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{R}$, cerco $x \in \mathbb{R}$)

$a = 0$ solo $x = 0$

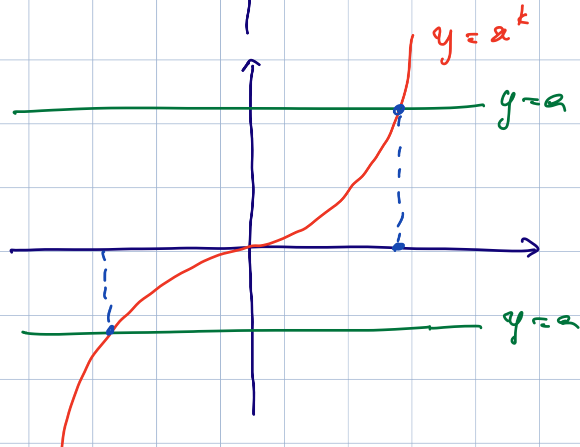
$a \neq 0$; k pari



$a > 0$ due soluz.

$a < 0$ nessuna soluz.

$a \neq 0$, k dispari



sempre una soluzione

grado k → soluz. una, due, nessuna

Fatto: su $\mathbb{C}$ l'equazione $z^k = a$ con $a \neq 0$ ha esattamente k soluzioni distinte (radici k-esime di a).

Cominciamo con $a = 1$; risolvo

$$z^k = 1.$$

Cerco z nella forma esponenziale $z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$;

$$\left(\rho \cdot e^{i\vartheta}\right)^k = 1$$

$$\rho^k \cdot \left(e^{i\vartheta}\right)^k = 1$$

$$\underbrace{\rho^k}_{\rho^k > 0} \cdot \underbrace{e^{ik\vartheta}}_{e^{i\varphi}} = 1$$

$\rho^k > 0$

$\Downarrow$

ρ^k deve essere il modulo di 1

$\Downarrow$

$\rho^k = 1$

$\Downarrow$

$\rho = 1$

$e^{i\varphi}$

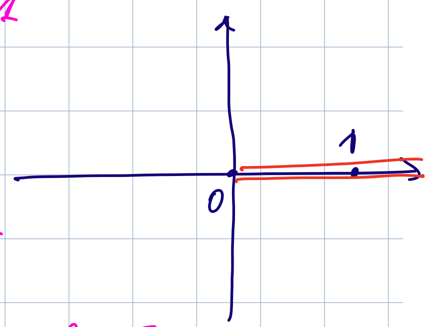
$\searrow$

$\varphi = k\vartheta$ deve essere un argomento di 1

$\Downarrow$

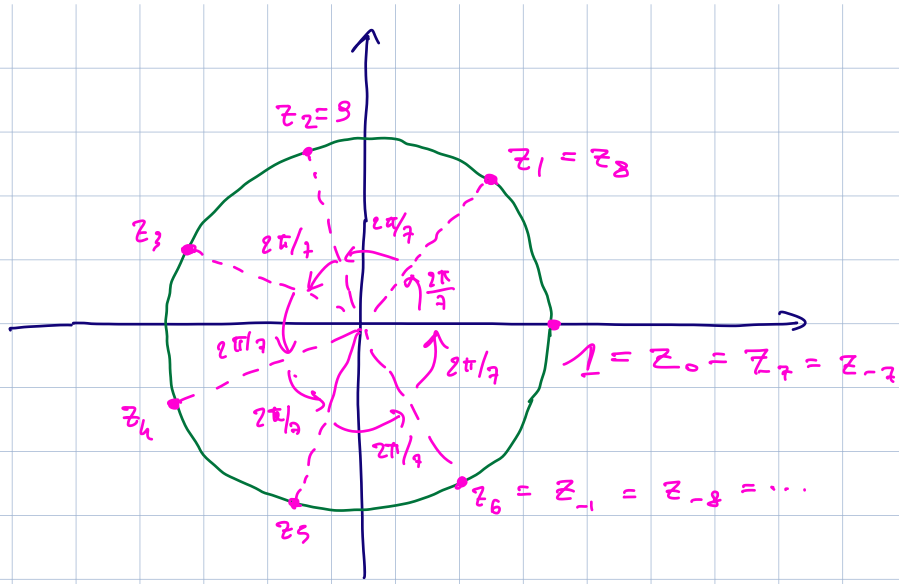
$k\vartheta = 2h\pi$ con $h \in \mathbb{Z}$

$\vartheta = \frac{2h\pi}{k}$ con $h \in \mathbb{Z}$

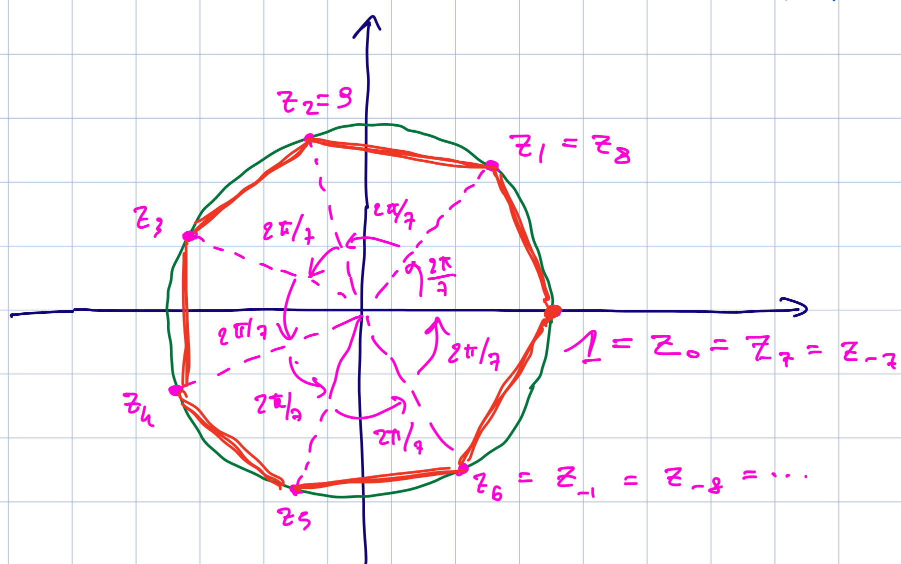


$\Rightarrow$ le soluz. di $z^k = 1$ sono $z_h = e^{i \cdot \frac{2h\pi}{k}}$ $h \in \mathbb{Z}$.

$k = 7$



Conclusione: l'equazione $z^k = 1$ ha esattamente
k soluzioni distinte date da
$$z = e^{2\pi i h/k} \qquad h = 0, 1, 2, \dots, k-1.$$



Sono i vertici del poligono regolare con k lati inscritto nella circonf. di centro O e raggio 1 e avente vertice in 1.

— o —

$z^k = a \qquad a \neq 0$

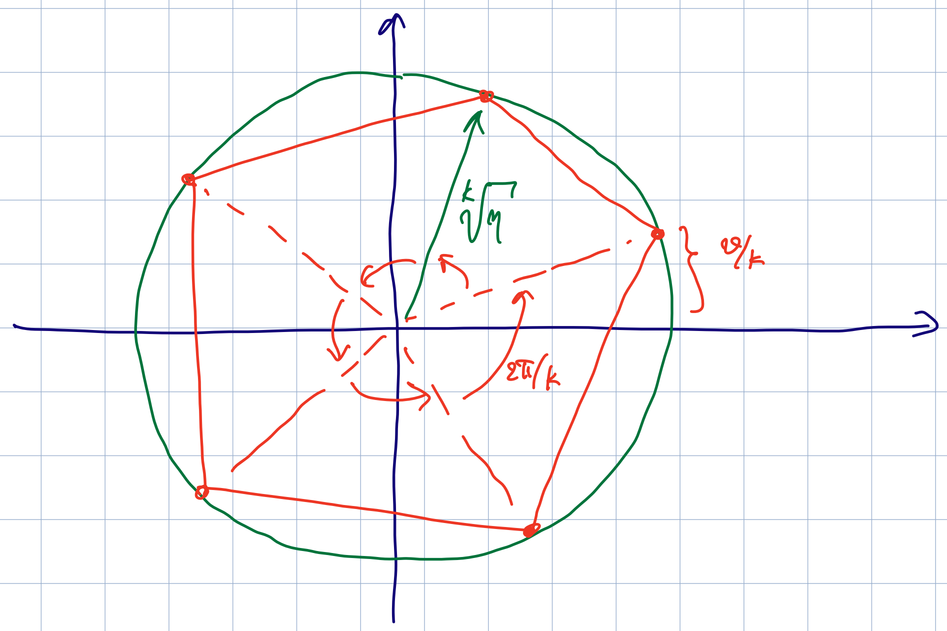
cerco $z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$ avendo $a = \eta \cdot e^{i\varphi}$ $\quad \eta > 0, \varphi$

$$\begin{cases} \rho^k = \eta \\ k\vartheta = \varphi + 2h\pi \quad h \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt[k]{\eta} > 0 \\ \vartheta = \dfrac{\varphi}{k} + 2\pi h/k \quad \cancel{h \in \mathbb{Z}} \\ h = 0, \dots, k-1 \end{cases}$$

$$z_h = \sqrt[k]{\eta} \cdot e^{i\varphi/k + 2\pi i\, h/k} \qquad h = 0, \dots, k-1$$

esattamente k distinte

$k = 5$



$\Rightarrow$ vertici di un k-agono regolare inscritto in una circonf. di centro O.

Oss: ogni $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ ha due radici quadrate.

TFA (Teorema Fondamentale dell'Algebra)

ogni $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ non costante ha radici.

anzi ne ha esattamente tante quanto il grado se contate in modo opportuno.

In $\mathbb{R}[x]$ c'è una divisione euclidea simile a quella in $\mathbb{N}$:

$$\deg(p(z)) = \max\{k : \text{il monomio } \alpha_k z^k \text{ ha } \alpha_k \neq 0\} \quad \text{se } p(z) \neq 0$$

$$\deg(0) = -\infty$$

Esempio: $(7x^3+2x-1) : (3x-5)$

$$\boxed{7x^3+2x-1} = (3x-5)\cdot\frac{7}{3}x^2 + \frac{35}{3}x^2 + 2x - 1$$

dividendo

$$= (3x-5)\left(\frac{7}{3}x^2 + \frac{35}{9}x\right) + \frac{115}{9}x + 2x - 1$$

$$= (3x-5)\left(\frac{7}{3}x^2 + \frac{35}{9}x\right) + \frac{133}{9}x - 1$$

$$= \boxed{(3x-5)}\left(\frac{7}{3}x^2 + \frac{35}{9}x + \frac{133}{27}\right) + \left(\frac{133\cdot 5}{27} - 1\right)$$

divisore — quoziente — resto

grado del resto < grado divisore

Dati $p(z), f(z) \in \mathbb{C}[z]$ con grado di $f(z)$ positivo esistono unici $q(z), r(z)$ t.c.

$$p(z) = f(z) \cdot q(z) + r(z)$$

e grado di $r(z)$ < grado di $f(z)$.

Esistenza : non facilissima

<u>Unicità</u> (ese) : come in $\mathbb{N}$.

<u>Teorema di Ruffini</u> : $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ ha la radice a se e solo se $p(z)$ è divisibile per $z-a$.

(multiplo)

<u>Dimo</u> : se $p(z) = (z-a) \cdot q(z)$ allora

$$p(a) = (a-a) \cdot q(a) = 0 \cdot q(a) = 0.$$

Supponiamo $p(a) = 0$ e eseguiamo $p(z) : (z-a)$.

Troviamo

$$p(z) = (z-a) \cdot q(z) + r(z)$$

grado di $r(z)$ < grado di $z-a$ che è 1

$$\Longrightarrow r \in \mathbb{C}$$

$$p(z) = (z-a) \cdot q(z) + r$$

$$\Longrightarrow \underbrace{p(a)}_{0} = \underbrace{\underbrace{(a-a)}_{0} \cdot q(a)}_{0} + r \Longrightarrow r = 0.$$

$\blacksquare$

Prendiamo $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ con radice a:

$$p(z) = (z-a)\cdot q_1(z) \begin{cases} q_1(a) \neq 0 \longrightarrow \text{molt. } a = 1 \\ q_1(a) = 0 \end{cases}$$

$$q_1(a) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$q_1(a) = (z-a)\cdot q_2(z)$$

$$\Downarrow$$

$$p(z) = (z-a)^2 \cdot q_2(z) \begin{cases} q_2(a) \neq 0 \longrightarrow \text{molt} = 2 \\ q_2(a) = 0 \end{cases}$$

$$q_2(a) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$p(z) = (z-a)^3 \cdot q_3(z) \quad \dots$$

Chiamo m la molteplicità di a se

$$p(z) = (z-a)^m \cdot q(z) \qquad \text{con} \qquad q(a) \neq 0.$$

<u>Oss</u>: m è il massimo k t.c. $(z-a)^k$ divide $p(z)$.

~~la molt. di a come radice è quante volte a è radice di $p(z)$.~~

<u>Fatto</u>: se $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ ha grado n (non nullo) allora ha n radici in $\mathbb{C}$ a contarle con le loro molteplicità!

Dimo (usando TFA) :

$p(z) = c \neq 0$; costante $n=0$, 0 radici

$\triangleright$ grado $> 0 \Rightarrow$ ha radice a_1

$\Rightarrow p(z) = (z-a_1)^{m} \cdot p_1(z)$ $\quad p_1(a_1) \neq 0.$

$p_1(z) = c \neq 0 \Rightarrow p(z) = c \cdot (z-a_1)^{m_1}$ $\quad$ grado $= m_1$

$\triangleright$ $p_1(z)$ ha grado $> 0 \Longrightarrow p_1(z)$ ha radice a_2

$p_1(z) = (z-a_2)^{m_2} \cdot p_2(z)$, $p_2(a_2) \neq 0$

$p(z) = (z-a_1)^{m_1} \cdot (z-a_2)^{m_2} \cdot p_2(z)$

.... $\boxed{p(z) = c \cdot (z-a_1)^{m_1} \cdot (z-a_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (z-a_h)^{m_h}}$

h radici distinte $a_1, \ldots, a_h$

con molteplicità $m_1, \ldots, m_h$

grado di $p(z) = m_1 + \ldots + m_h$.