

Foglio 2

Es 4

d) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(n) = \frac{(-1)^n}{1+|n|}$

DISEGNAMO $g(x) = \frac{1}{1+|x|} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1+x} & x \geq 0 \\ \frac{1}{1-x} & x < 0 \end{cases}$$

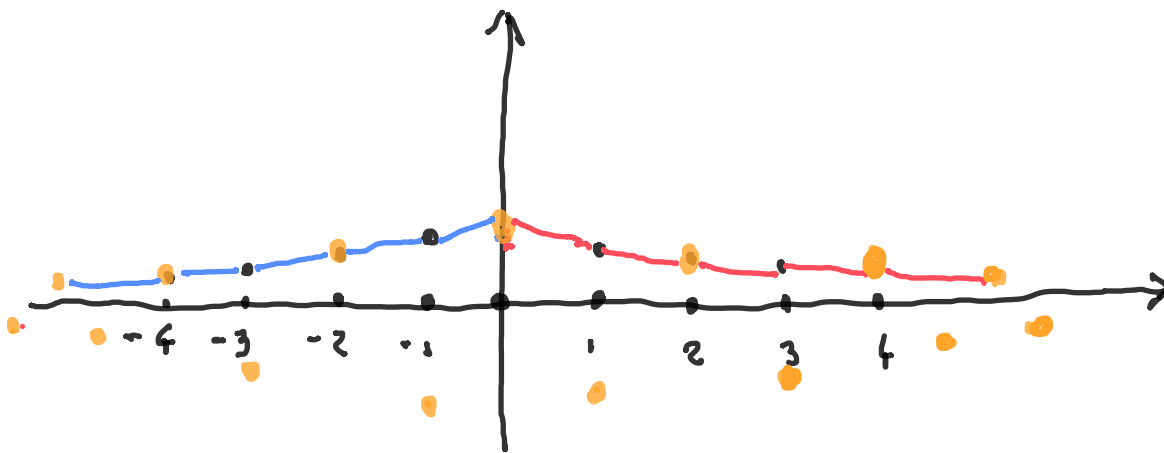


GRAFICO DI
 f

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ PARI} \\ -1 & n \text{ DISPARI} \end{cases}$$

Es 5

a) IN QUANTI MODI POSSO ALLINEARE 9 LIBRI DIVERSI?

Risposta: IL NUMERO DI PERMUTAZIONI SU 9 ELEMENTI DISTINTI

$$\Rightarrow 9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdots 1 = 362880$$

b) IN QUANTI MODI POSSO ALLINEARE 3 U, 5 D, 4 G?

RISPOSTA: IL NUMERO DI PERMUTAZIONI SU 12 EL. CON 3, 5, 4 RISPETTIV.

$$\Rightarrow \frac{12!}{3! \cdot 5! \cdot 4!} = 27720$$

c) IN QUANTI MODI POSSO SCEGLIERE 4 DENARI DA UN MAZZO DI 52 CARTE?

RISPOSTA: COMBINAZIONI DI 4 ELEMENTI DA 13.

$$\Rightarrow \binom{13}{4} = \frac{13!}{4! \cdot 9!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 715$$

Es 6

b) POSSIBILI STRISCIE DI 6 RISULTATI CON 10 PUNTI

ESEMPIO

$\left. \begin{array}{l} \bullet 333100 \\ \bullet 331111 \end{array} \right\}$ IL NUMERO DI VITTORIE PUÒ ESSERE 3 o 2

NUMERO DI STRISCIE CON 3 VITTORIE: $\frac{6!}{3! \cdot 1! \cdot 2!} = \frac{5!}{2!} = 60$

NUMERO DI STRISCE CON 2 VITTORIE: $\frac{6!}{2! 4!} = \binom{6}{2} = 15$

NUMERO DI STRISCE TOT = $60 + 15 = 75$

e) POSSIBILI PIANI DI ALLENAMENTO S, P, A
IN GIORNI DISTINTI E CIASCUNA PER SOLO UN GIORNO

ESEMPIO

S	P	A
L	Ma	Me
L	Me	D

L Ma, Me ≠ Ma Me L

RISPOSTA: NUMERO DI DISPOSIZIONI DI 3 EL DA 7

$$\Rightarrow \binom{7}{3} \cdot 3! = \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot 3! = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

Annotations in red:
 $\binom{n}{k}$ with $n=7, k=3$ is labeled "COMBINAZIONI".
 $3!$ is labeled "PERMUTAZIONI".
 $4!$ is labeled $n!$.
 $3! \cdot 4!$ is labeled $(n-k)!$.

f) GRUPPI DI 3 PERSONE NON TUTTE DELLO STESSO SESSO
PRESE DA 6 M E 7 F

||

GRUPPI " M M F " + GRUPPI " M F F "
A B

$$\begin{array}{l}
 A \text{ (MFF)} = \underset{\substack{\text{SCEGLIERE} \\ F}}{7} \cdot \binom{6}{2} = 105 \\
 B \text{ (MFF)} = 6 \cdot \binom{7}{2} = 126
 \end{array}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} = 231$$

RICEVIMENTO DOTTORANDA MAR 14:30 - 16:30

CRISTINA POLI

Es 7

$$a) \binom{n-2}{k+1} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} = \binom{n}{n-k-1} \quad (*)$$

$$\bullet \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

SIMMETRIA

$$\bullet \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

IDENTITÀ A

APPLICHIAMO A

$$\binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k+1} = \binom{n-1}{k+1}$$

$$(*) \binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{n-k-1}$$

RIAPPLICHO A

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{n-k-1}$$

PER SIMMETRIA

$$\binom{n}{n-k-1} = \binom{n}{n-k-1}$$

$$d) \sum_{n=2}^m \binom{n}{2} = \frac{1}{6} m(m-1)(m+1) = \binom{m+1}{3}$$

|| DEFINIZIONE

$$\sum_{n=2}^m \frac{n^2 - n}{2} = \frac{1}{6} m(m-1)(m+1)$$

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{n=2}^m n^2 - \sum_{n=2}^m n \right) = \frac{1}{6} m(m-1)(m+1)$$

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^m n^2 - \sum_{n=0}^m n \right) = \frac{1}{6} m(m-1)(m+1)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} - \frac{(m+1)m}{2} \right) = \frac{1}{6} m(m-1)(m+1)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2m^3 + 3m^2 + m - 3m^2 - 3m}{6} \right) = \frac{1}{6} m(m-1)(m+1)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2m^3 - 2m}{6} \right) = \frac{1}{6} m(m-1)(m+1)$$

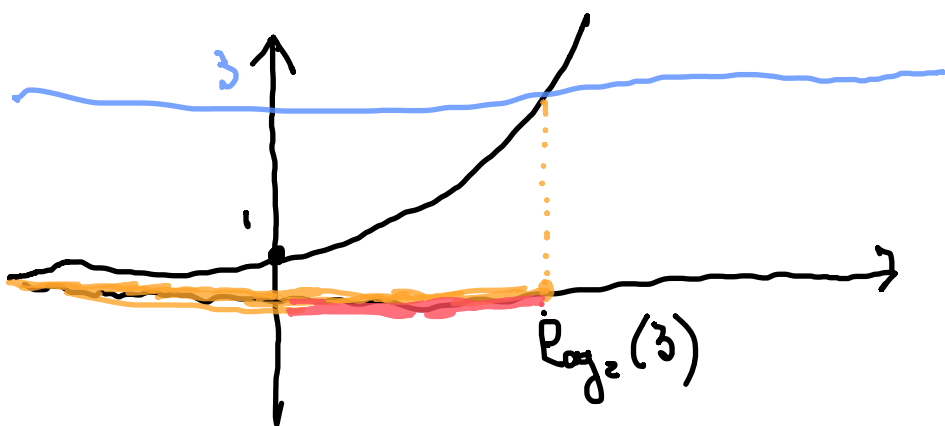
$$\frac{m(m-1)(m+1)}{6} = \frac{1}{6} m(m-1)(m+1)$$

Es 8

a) $A \subseteq X$ è SUPERIORMENTE LIMITATO SE $\exists N \in X$ T.C.
 $x \leq N, \forall x \in A$

$$X = \mathbb{Q}, A = \left\{ x \in X : x > 0, 2^x < 3 \right\}$$

DISEGNO $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 2^x$



$$x: 2^x < 3$$

$$x: \begin{cases} 2^x < 3 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Q} : x > 0, x < \log_2(3) \right\}$$

• A SUPERIORMENTE LIMITATO $N=2$ HO $x < 2 \forall x \in A$

• A INFERIORMENTE " $N=-1$ HO $x > -1 \forall x \in A$

• A AMMETTE ESTRETO INFERIORE

OVVERO ESISTE $x \in X$ T.C.

$$\bullet x \leq a, \forall a \in A$$

• SE $y \leq a \forall a \in A$ ALLORA
 $y \leq x$

SI: $0 = \inf(A)$

• A AMMETTE ESTREMO SUPERIORE?

NO. POTREI PRENDERE $x = \log_2(3)$ MA $x \notin X$

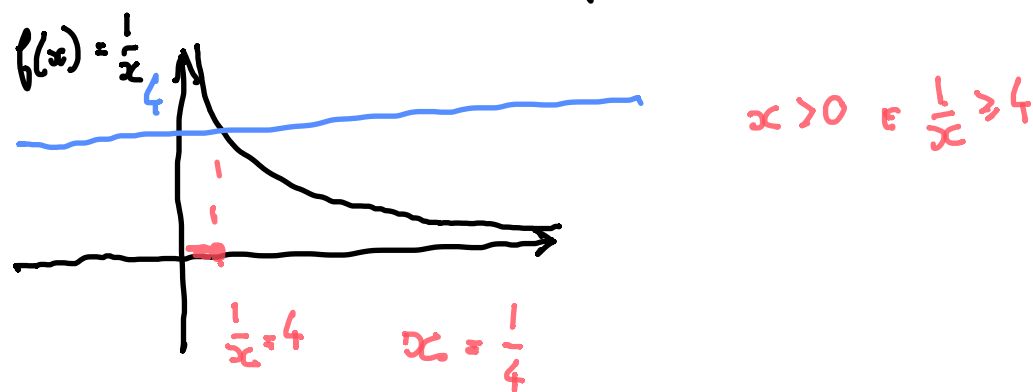
PERCHÉ $\log_2(3)$ NON È RAZIONALE

• A HA MASSIMO? NO, NON C'È NEMMENO IL SUP

• A HA MINIMO? NO. SE AMMETTESSE MINIMO ALLORA

$\min(A) = \inf(A) = 0$. MA $0 \notin A$.

f) $X = \mathbb{R}$, $A = \{x \in X : x > 0, \frac{1}{x} \geq 4\}$



$A = \{x \in X : x > 0, x \leq \frac{1}{4}\}$

• A È SUP LIMITATO? SÌ, AD ESEMPIO $x \leq 365, \forall x \in A$

• A È INF LIMITATO? SÌ, " $x \geq -17, \forall x \in A$

• A AMMETTE SUP? SÌ, $\sup(A) = \frac{1}{4} \in A$

QUINDI $\max(A) = \frac{1}{4}$

• A AMMETTE INF? $\text{INF}(A) = 0 \notin A$

NO, A NON AMMETTE MINIMO.