Ist. Mat. I - CIA
15/11/23

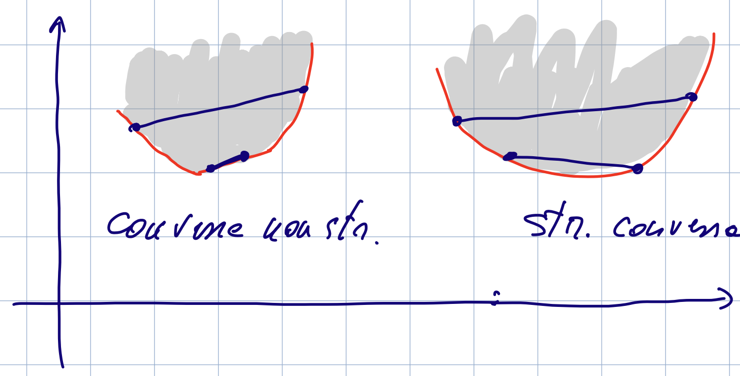
$A \subset \mathbb{R}^2$ convesso se $\forall P, Q \in A$, $\overline{PQ} \subset A$.

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ convessa se $\left\{ \binom{x}{y} : x \in [a,b], y \geq f(x) \right\}$ è convesso

Visto: f convessa $\iff$ $x_0 < x_1$, $P_0 = \binom{x_0}{f(x_0)}$ $P_1 = \binom{x_1}{f(x_1)}$
$\overline{P_0P_1} \subset$ sopragrafico

$\iff \forall x_0 < x_1 \quad \forall t \in [0,1]$
$f((1-t)x_0 + t x_1) \leq (1-t) f(x_0) + t f(x_1)$

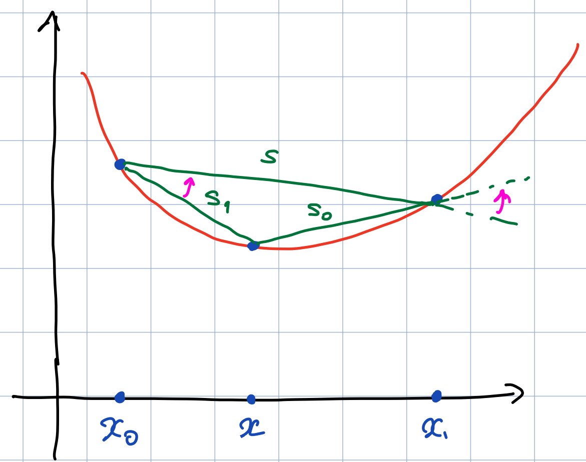
Def: f strettamente convessa se $\forall x_0 < x_1$, $t \in (0,1)$
$f((1-t)x_0 + t x_1) < (1-t) f(x_0) + t f(x_1)$



Prop: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ con f', f''
f convessa $\iff f'$ crescente
$\iff f'' \geq 0$

Dim.: seconda $\Leftrightarrow$ facile: g crescente $\Leftrightarrow g' \geq 0$

$\Leftrightarrow$: $\underline{\Rightarrow}$ suppongo f convessa, $x_0 < x_1$



Prendo $x_0 < x < x_1$; allora s sta sopra s_0 e s_1

$$\underbrace{m_{s_1} \leq m_s \leq m_{s_0}}$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \underbrace{\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}_{\text{fisso indip. da } x} \leq \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

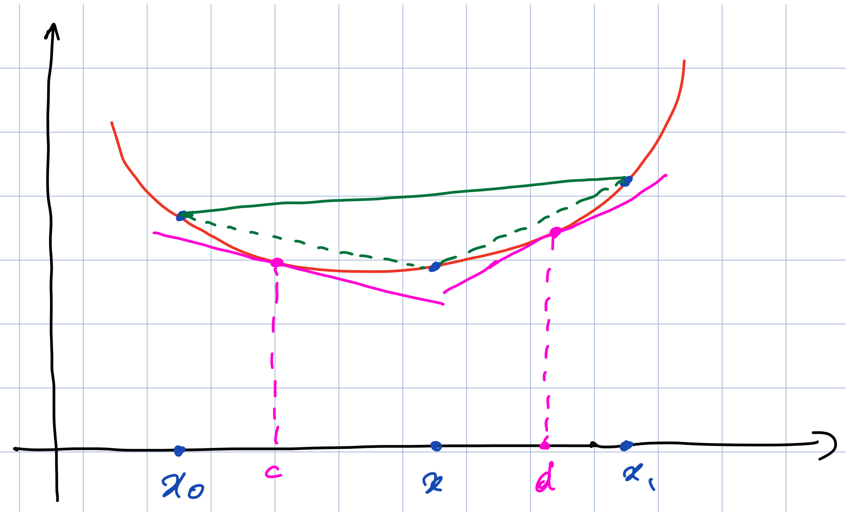
$\Rightarrow$ I $\leq$ III

anche se x nel I non è lo stesso che x nel III

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow{x \to x_0^+} f'(x_0) \qquad \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \xrightarrow{x \to x_1^-} f'(x_1)$$

$\Rightarrow f'(x_0) \leq f'(x_1)$

$\underline{\Leftarrow}$ Supponiamo f' crescente e prendiamo $x_0 < x < x_1$
$x = (1-t)x_0 + t x_1$; devo vedere che
$f(x) \leq (1-t) f(x_0) + t f(x_1)$.



Uso due volte Lagrange su $[x_0, x]$ e $[x, x_1]$:

$\exists\, c \in (x_0, x)$ t.c. $f'(c) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$\exists\, d \in (x, x_1)$ t.c. $f'(d) = \dfrac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$

Per ipotesi

$$
\begin{array}{ccc}
f'(c) & \leq & f'(d) \\
\| & & \| \\
\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(1-t)x_0+tx_1-x_0} & & \dfrac{f(x_1)-f(x)}{x_1-((1-t)x_0+tx_1)} \\
\| & & \| \\
\dfrac{f(x)-f(x_0)}{t\cdot\cancel{(x_1-x_0)}} & \leq & \dfrac{f(x_1)-f(x)}{(1-t)\cdot\cancel{(x_1-x_0)}}
\end{array}
$$

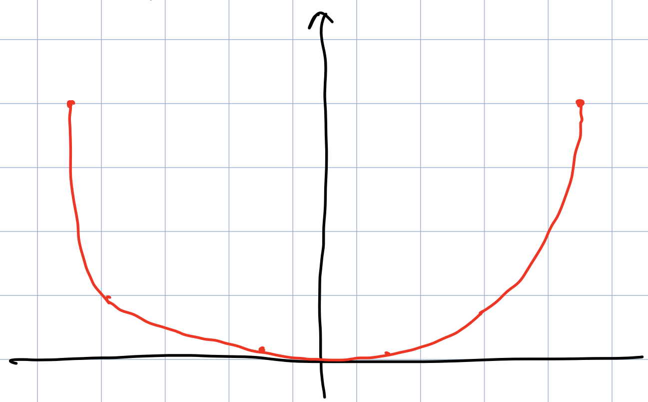
$\Rightarrow (1-t)f(x) - (1-t)f(x_0) \leq t\cdot f(x_1) - t\cdot f(x)$

$\Rightarrow f(x) \leq (1-t)f(x_0) + t\, f(x_1)$. $\blacksquare$

f convessa su $[a,b] \Leftrightarrow f'' \geq 0$ su $[a,b]$

Stesso argomento: $f'' > 0 \Rightarrow f'$ str. crescente $\Rightarrow f$ str. conv.

Att: falso viceversa. $f(x)=x^4$ in $[-1,1]$

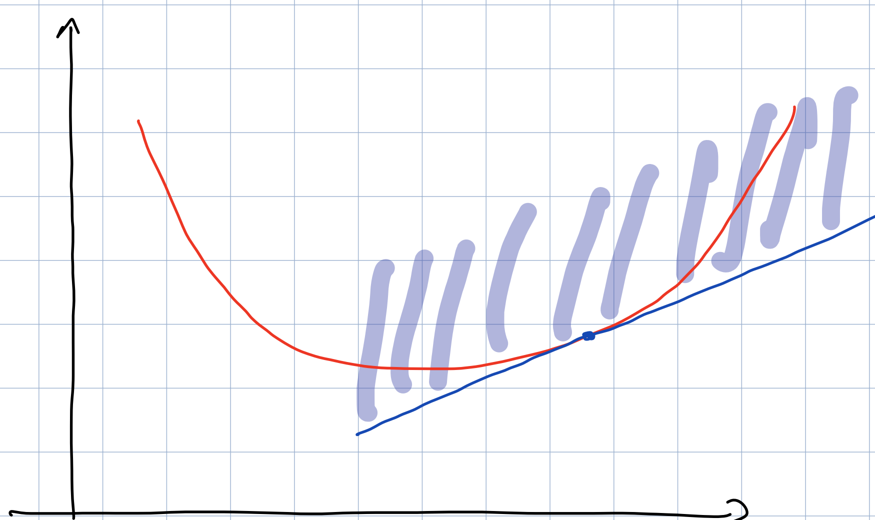


str. convessa
(f' str. crescente)

$f''(x)=12x^2 \geq 0$
nulla in $x=0$.

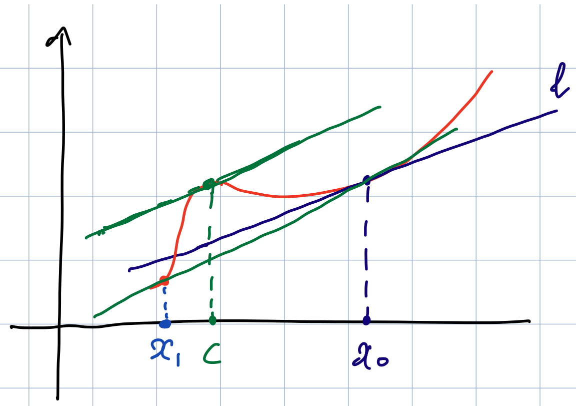
Teo: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ con f'

f convessa $\iff$ sempre sopra le sue tangenti.



Dim: $\boxed{\Rightarrow}$ Sia ℓ tg in x_0.

Per assurdo: $\exists\, x_1\neq x_0$ t.c. $(x_1, f(x_1))$ è sotto ℓ



Lagrange: $\exists\, c$ tra x_1 e x_0 t.c. $f'(c) = \dfrac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$

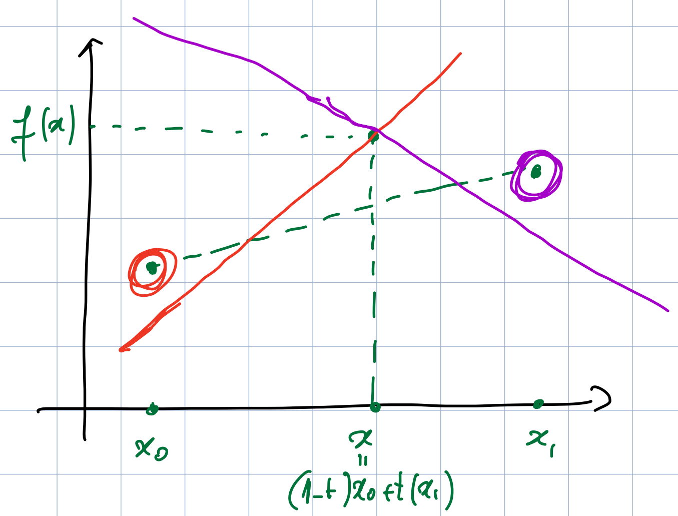
$$\vee$$

$$f'(x_0)$$

contraddice il fatto che f' è crescente.

(figura analoga se $x_1 > x_0$)

$\boxed{\Leftarrow}$ $\exists\, x_0 < x_1$ $t \in (0,1)$ t.c.



$$f(x) > (1-t)\, f(x_0) + t \cdot f(x_1)$$

Una retta passante per $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ sta sopra ad almeno uno di $\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} x_1 \\ f(x_1) \end{pmatrix}$.

$\boxed{\pi}$

Def: chiamo x_0 un punto di flesso per f se $\exists\, \varepsilon > 0$ t.c.

f è convessa su $[x_0 - \varepsilon, x_0]$
f è concava su $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ o viceversa

Oss: se x_0 è flesso ho $f''(x_0) = 0$

e $f''(x) \geq 0$ su $[x_0 - \varepsilon, x_0]$ o viceversa

$f''(x) \leq 0$ su $[x_0, x_0 + \varepsilon]$

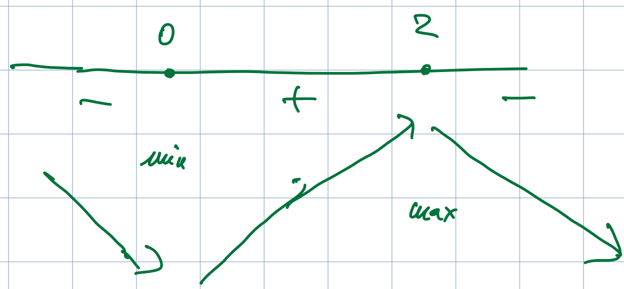
Se $f''(x_0) = 0$ $\quad f''(x) > 0$ su $[x_0 - \varepsilon, x_0)$ o vic.

$f''(x) < 0$ su $(x_0, x_0 + \varepsilon]$

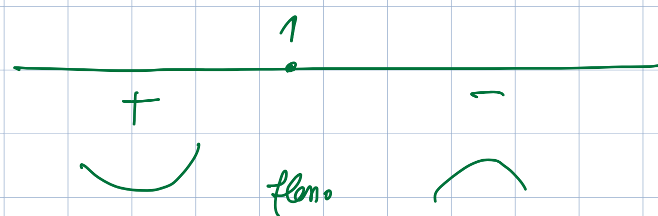
allora x_0 è un flesso.

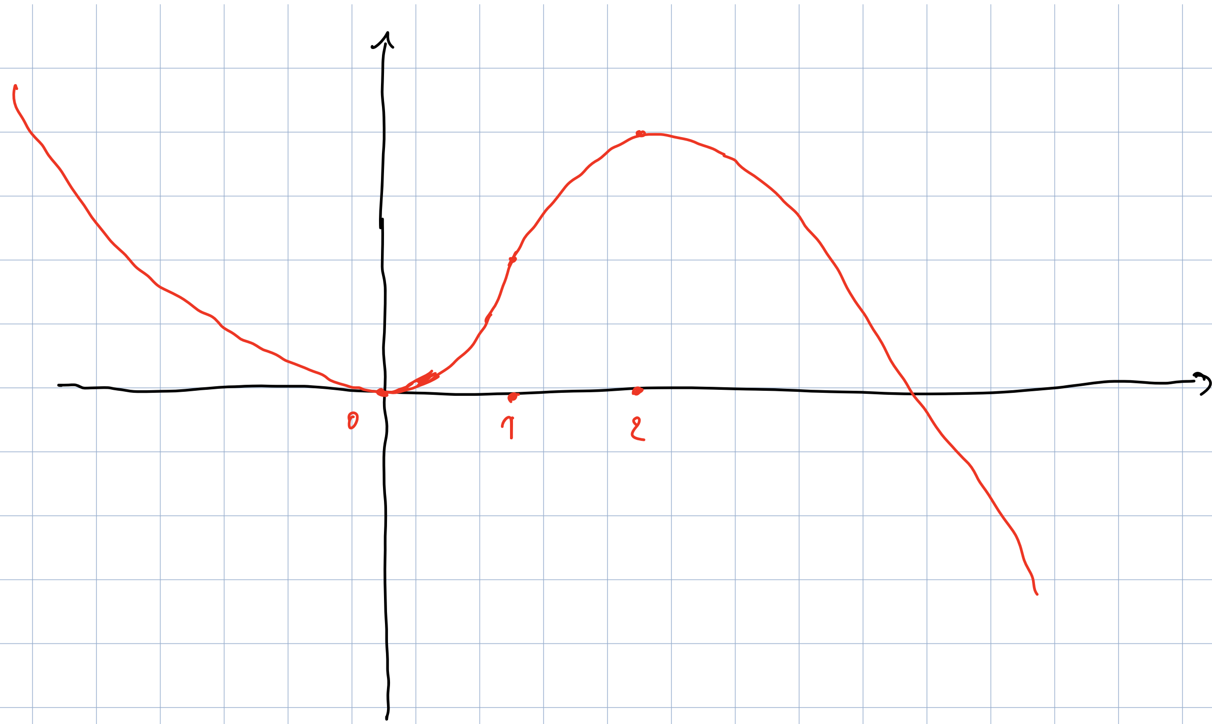
$f(x) = 3x^2 - x^3$ su $\mathbb{R}$

$f'(x) = 6x - 3x^2 = 3x(2 - x)$



$f''(x) = 6 - 6x = 6(1 - x)$





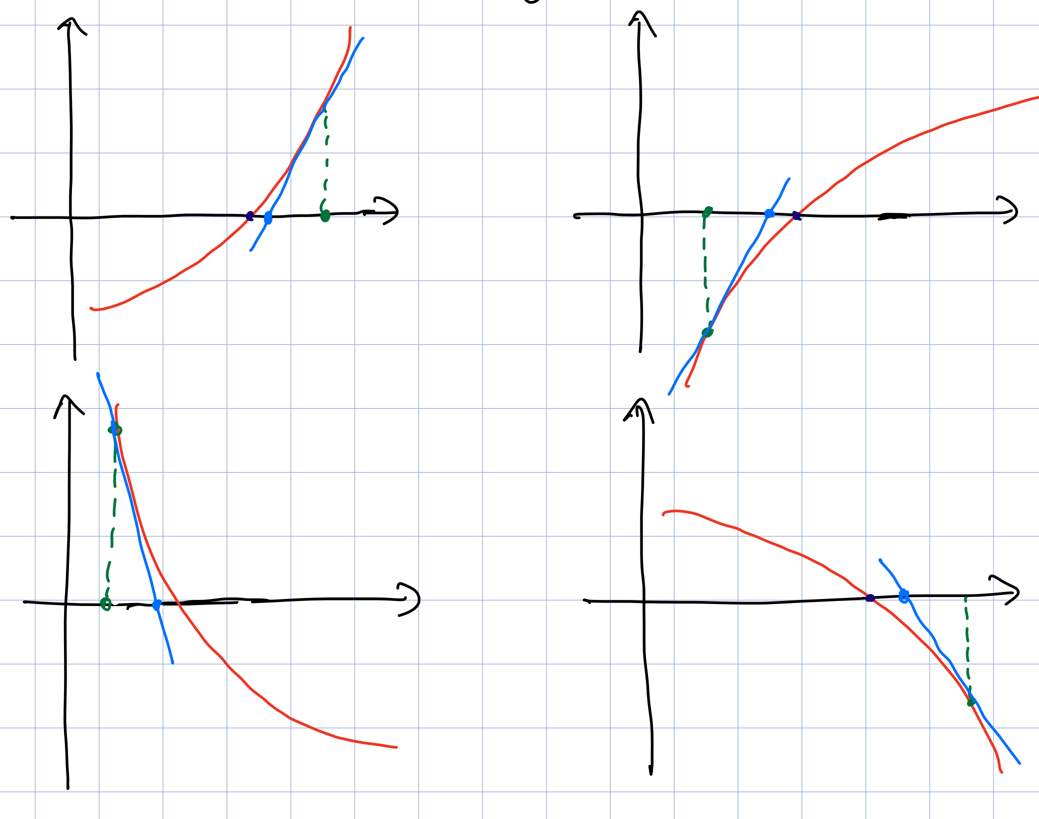
Studio di funzione: data espressione $f(x) = \ldots$

- dominio : più grande D t.c. l'espressione $f(x)$ ha senso per $x \in D$.
- valori / limiti agli estremi
- asintoti obliqui
- crescenza / decr. max / min
- concavità / conv. flessi
- zeri, periodicità, parità / disparità ...

Algoritmo veloce per ricerca zeri di f monotona con valori discordi agli estremi.

Supponiamo di avere una $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ con f', f'' mai nulli e $f(a) \cdot f(b) < 0$.

A seconda dei casi se ho uno zero approssimato da sx o da dx ottengo una migliore approssimazione prendendo lo zero della tangente nel punto.



Teo: f con f', f'' continue mai nulle su $[a,b]$
$f(a) \cdot f(b) < 0$ pongo $x_0 = a$ se f', f'' discordi
$x_0 = b$ se f', f'' concordi.

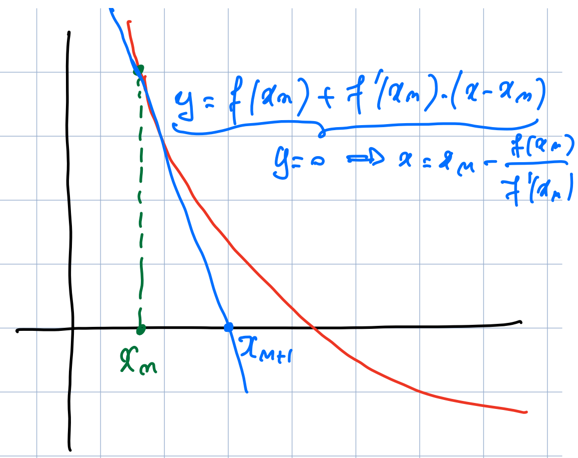
Definisco $(x_n)_{n=0}^{+\infty}$ per ricorsione :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

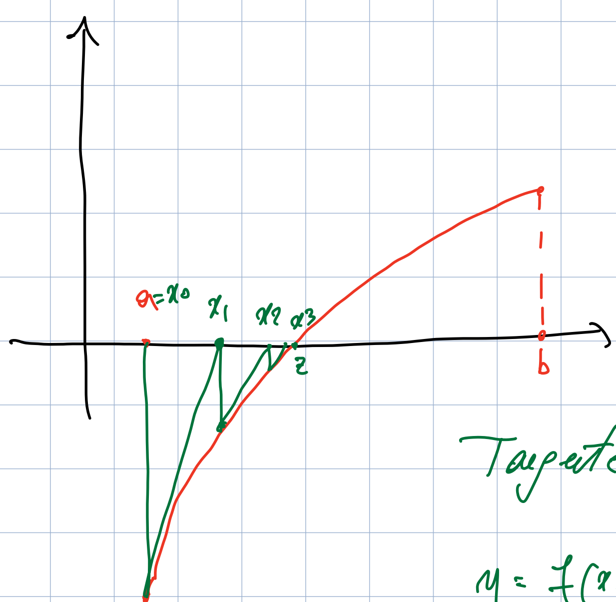
$$\vdots$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Allo x_n tende all'unico zero di f su $[a,b]$.

Dim: Faccio $f' > 0$, $f'' < 0$, $x_0 = a$. Chiamo z lo zero



Provo per ogni n che:

1) x_{n+1} esiste ed è $< z$
2) $f(x_{n+1}) < 0$
3) $x_n < x_{n+1}$

Tangente a grafico in $\begin{pmatrix} x_n \\ f(x_n) \end{pmatrix}$ è

$$y = f(x_n) + f'(x_n)\cdot(x - x_n)$$

$f'' < 0 \Rightarrow f$ concava $\Rightarrow f$ è sotto la tg.
in particolare in z, dove $y = 0$:

$$0 < f(x_n) + f'(x_n)\cdot(z - x_n)$$

$$\Rightarrow z > \underbrace{x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{x_{n+1}}$$

$\Rightarrow x_{n+1}$ esiste ed è $< z$ (1)

$f(x_{n+1}) < f(z) = 0$ (2)

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > x_n$ (3)

< 0

> 0

Conclusione x_n ha limite x_∞ poiché cresce ed è limitata.

$$\begin{array}{ccccc} x_{n+1} & = & x_n & - & \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x_\infty & & x_\infty & & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow f(x_n) \to 0$

$\Rightarrow x_n \to z.$ $\blacksquare$

Serie numeriche.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} S_k \qquad S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$$

Dico $\sum a_n$ converge se lim esiste finito

diverge se lim esiste $\pm\infty$

.... se lim non esiste

Visto: se f ha tutte le derivate in x_0

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n + o((x-x_0)^m)$$

Domanda: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n$?

Fatto: sì per e^x, $\cos(x)$, $\sin(x)$

$\log(1+x)$ per $|x|<1$

$(1+x)^\alpha$ per $|x|<1$

Dunque $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\forall x$

$\cos(x) = \dots$ $\forall x$

$\sin(x) = \dots$ $\forall x$

$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ se $|x|<1$

$(1+x)^\alpha = \dots$ se $|x|<1$.

Es: $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Affermo che f ha in 0 tutte le derivate e sono tutte 0.

Ne segue che tutti i polinomi di Taylor sono 0 dunque non è vero che $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \underbrace{\underbrace{e^{-\frac{1}{x^2}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{2}{x^3}}_{\to \pm\infty}}_{0} \qquad f''(x) = \underbrace{\underbrace{e^{-\frac{1}{x^2}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\left(\left(\frac{2}{x^3}\right)^2 - \frac{6}{x^4}\right)}_{\pm\infty}}_{0} \qquad \ldots$$

Ese: verificare per induzione che

$$f^{(n)}(x) = \underbrace{\underbrace{\frac{p_n(x)}{q_n(x)}}_{\to ?} \cdot \underbrace{e^{-1/x^2}}_{\to 0}}_{0} \qquad p_n(x), q_n(x) \in \mathbb{R}[x]$$

Dunque $f^{(n)}(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \qquad \forall n$

$\Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = 0$