1_ 22/02/24

ISTITUZIONI DI MATEMATICA I, 22/02/2024

Programma di oggi: - es. su int. per sostituzione
- integrali generalizzati

I INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Riprendiamo la formula di ieri:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) \quad \text{con } F \text{ primitiva di } f$$

Dimostrazione:

$$\frac{d}{dx}\Big(F(g(x))\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{derivata di una composizione}}}{=} F'(g(x))\cdot g'(x) \underset{\substack{\uparrow \\ F'=f}}{=} f(g(x))\cdot g'(x)$$

Passando agli integrali:

$$\underbrace{\int \frac{d}{dx}\big(F(g(x))\big)}_{=F(g(x))} = \int f(g(x))\cdot g'(x) \qquad \square$$

ES

$$\int \frac{1}{x\,\ln x}\,dx = \int \frac{1}{g(x)}\cdot g'(x)\,dx = \ln|g(x)| + C = \ln|\ln x| + C$$

($\frac{1}{x}$: $g'(x)$, $\ln x$: $g(x)$)

È la formula sopra con

$f(t) = \frac{1}{t}$, $F(t) = \ln|t|$ $\quad g(x) = \ln x$.

2 - 22/02

La formula si può usare / leggere in due modi:

MODO 1: $\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(y)\,dy = F(y) = F(g(x))$

utile se riconosciamo g e g' nell'integrando

MODO 2: $\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt = \dots(t) = \dots(x).$

$x = g(t)$ cambio di variabile (g è una bijezione tra intervalli)

$dx = g'(t)\,dt$

In entrambi i casi dobbiamo:

(1) cambiare la var. x nell'integrando

(2) cambiare dx

(3) tornare alla x dopo aver integrato

ES $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t + C = \boxed{\arctan(x-1) + C}$

1. $t = x-1 \Rightarrow x = t+1$
2. $dt = dx$
3. $t = x-1$

ES $\displaystyle\int (3x+7)^{100}\,dx = \int t^{100}\,\frac{1}{3}\,dt = \frac{1}{3}\int t^{100}\,dt = \frac{1}{3}\,\frac{t^{101}}{101} + c = \boxed{\frac{(3x+7)^{101}}{303} + c.}$

1. $t = 3x+7$
2. $dt = 3\,dx \qquad dx = \frac{1}{3}\,dt$
3.

3_ 22/02

FORMULA DI SOSTITUZIONE NEGLI INT. DEFINITI

↳ possiamo usare i conti precedenti per trovare una primitiva F e usare $\int f = F \Rightarrow \int_a^b f = F(b)-F(a)$.

↳ oppure possiamo sostituire lo step (3) con un cambio di estremi di integrazione:

$$\int_a^b f(x)\,dx \underset{x=g(t)}{=} \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))\, g'(t)\,dt$$

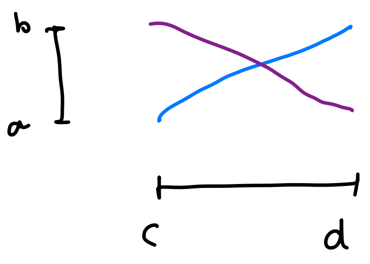
Quindi: ricordiamoci di fare 3 passaggi:

(1) $x \rightsquigarrow g(t)$

(2) $dx \rightsquigarrow g'(t)\,dt$

(3) $a \rightsquigarrow g^{-1}(a)$, $b \rightsquigarrow g^{-1}(b)$

OSSERVAZIONE Sia g una biiezione tra $[c,d]$ e $[a,b]$: $[a,b] = g([c,d]) \Rightarrow$ Ci sono due casi:



o $g(c)=a$ e $g(d)=b$ $\Rightarrow \int_a^b \dots = \int_c^d \dots$

oppure $g(c)=b$ e $g(d)=a$ $\Rightarrow \int_a^b \dots = \int_d^c \dots = -\int_c^d \dots$

4-22.02

ES $\displaystyle\int_{-1}^{0} \sin(\sqrt{x+1})\,dx = \int_0^1 (\sin t)\, 2t\,dt$

$t = \sqrt{x+1} \Rightarrow \sin(\sqrt{x+1}) = \sin t$

$t^2 = x+1 \Rightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$x = g(t)$ $\qquad dx = g'(t)\,dt$

Se $x = -1 \Rightarrow t = \sqrt{-1+1} = 0$

Se $x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{0+1} = 1$

Questo si integra per parti:

$$2\int_0^1 t \sin t \, dt = 2\left\{ \underbrace{\left[-t\cos t\right]_0^1}_{fg} - \underbrace{\int_0^1 1\cdot(-\cos t)\,dt}_{\int f'g} \right\}$$

$\int f \quad g'$

$$= 2\left\{-1\cos(1) + \cancel{0}\cdot\cos(0) + \sin(1) - \cancel{\sin(0)}\right\} = 2\left[\sin(1) - \cos(1)\right].$$

ES $\displaystyle\int \frac{1+e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{1+t}{t(t^2+1)}\,dt$

grado 2 con radici complesse coniugate

grado 1

$t = e^x$

$dt = e^x dx = t\,dx \Rightarrow dx = \frac{1}{t}\,dt$

(o anche $t = e^x \Rightarrow x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{1}{t}\,dt$)

5 _ 22/02

Cerchiamo $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che $\dfrac{1+t}{t(t^2+1)} = \dfrac{A}{t} + \dfrac{Bt}{t^2+1} + \dfrac{C}{t^2+1}$

$\Rightarrow \quad 1+t = A(t^2+1) + Bt^2 + Ct$

Si tratta di una uguaglianza tra polinomi di grado 2

$\Rightarrow$ i 3 coeff. (grado 2, grado 1, grado 0) devono essere uguali.

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \text{grado 2} \\ \text{grado 1} \\ \text{costante} \end{array} \begin{cases} 0 = A + B \\ 1 = C \\ 1 = A \end{cases} \Rightarrow \quad A = C = 1, \; B = -1.$$

$$\Rightarrow \int \cdots = \int \frac{1}{t}\,dt - \int \frac{t}{t^2+1}\,dt + \int \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$= \ln|t| - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \arctan(t) + C$$

$$= \underbrace{\ln|e^x|}_{\shortparallel\; \ln(e^x) = x} - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + \arctan(e^x) + C$$

$$= \boxed{x - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + \arctan(e^x) + C.}$$

Una sostituzione standard per integrali di funzioni trigonometriche, come $\sin x$, $\cos x$, ..., è:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad x = 2\arctan(t) \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

L'integranda si "trasforma" usando
$$\begin{cases} \sin x = \dots = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

ES
$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x}\,dx \underset{t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{=} \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

Da qui si risolve (in t) come integrale di funzione razionale. Dobbiamo ricordarci di fare il passo (3) alla fine.

$$= 2\int \frac{1}{2t+1-t^2}\,dt = -2\int \frac{1}{t^2-2t-1}\,dt$$

Radici del denominatore: $\alpha = 1+\sqrt{2}$, $\beta = 1-\sqrt{2}$

$$t^2 - 2t - 1 = (t-\alpha)(t-\beta)$$

Formula risolutiva: cerchiamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{(t-\alpha)(t-\beta)} = \frac{A}{t-\alpha} + \frac{B}{t-\beta}$$

$$\Rightarrow \quad (A+B)t + (-A\beta - B\alpha) = 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} B = -A \\ A = \dfrac{1}{\alpha-\beta} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \cdots = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln|t-\alpha| - \ln|t-\beta| + C \right]$$

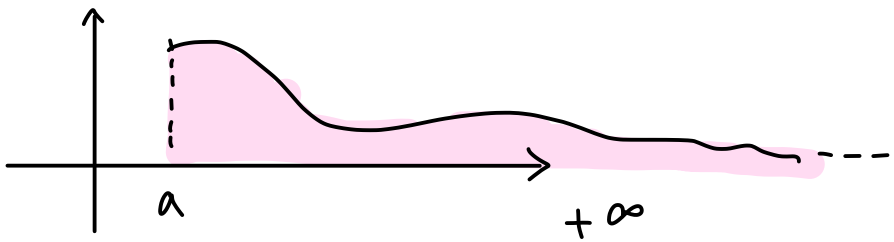
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 - \sqrt{2}\right| - \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 + \sqrt{2}\right|\right] + C.$$

$\alpha = 1+\sqrt{2}$, $\beta = 1-\sqrt{2}$, $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

8_ 22/02

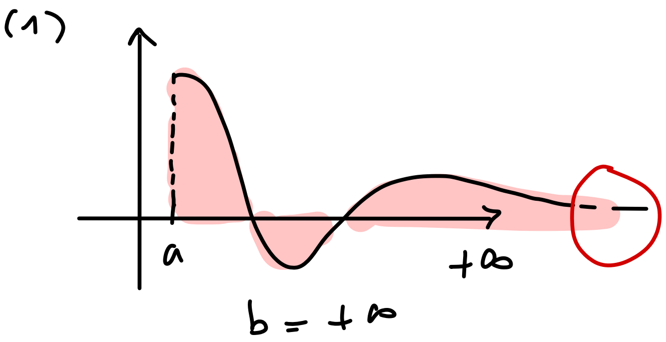
II INTEGRALI IMPROPRI (O GENERALIZZATI)

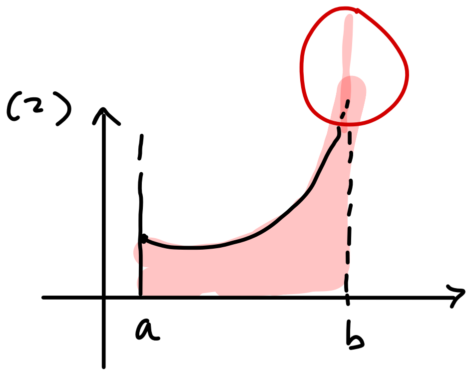
Motivazione: data $f \geq 0$, $f: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ continua, ci chiediamo se l'area della regione (illimitata) tra l'asse x e il grafico di f sia finita.



Domanda più precisa: possiamo calcolare integrali di funzioni continue non limitate o definite su un intervallo illimitato?

Esempi: $f: [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

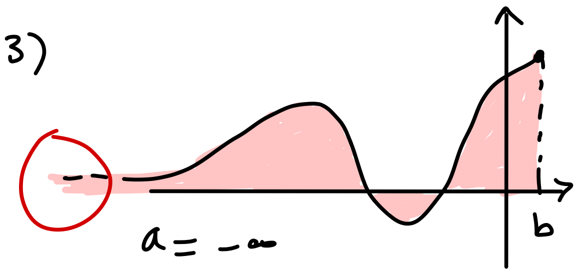




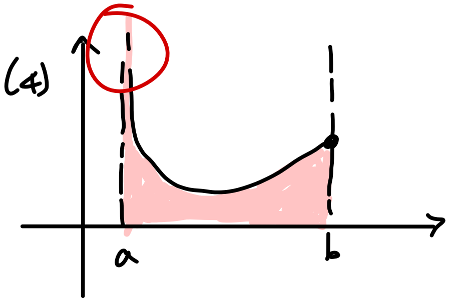
9 - 22/02

Analogamente $f: (a, b] \to \mathbb{R}$ continua

(3)

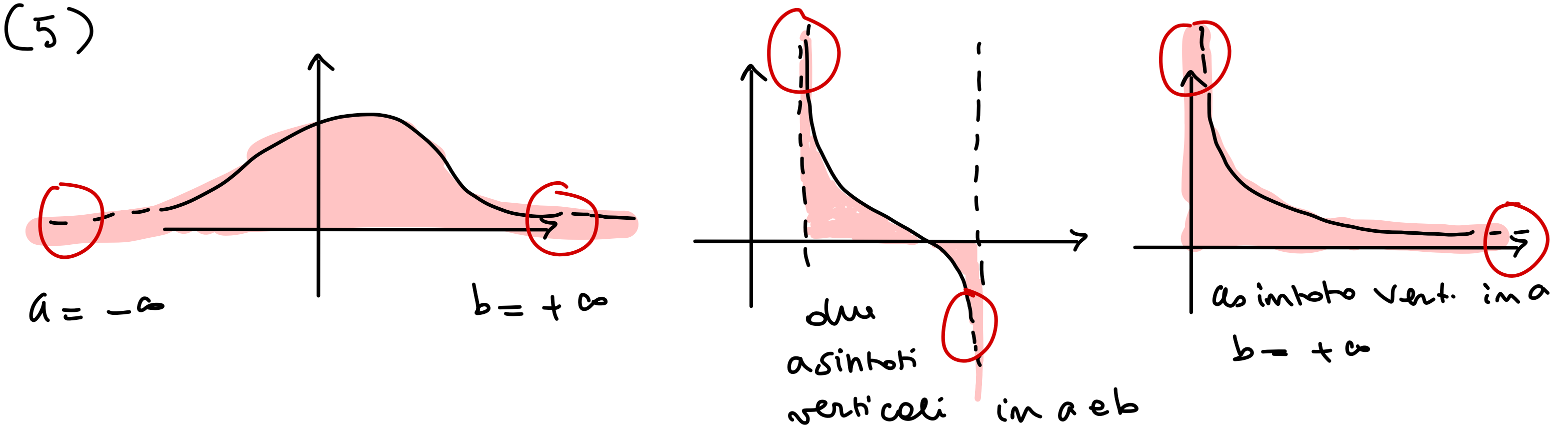


(4)



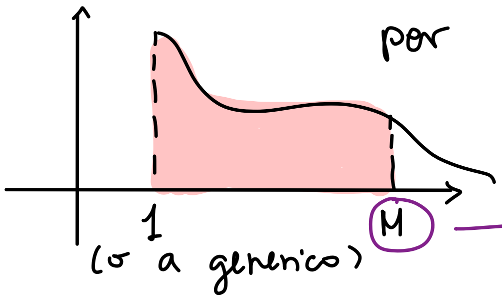
Infine, potrebbero esserci due delle situazioni precedenti

(5)



L'esistenza dell'integrale dipende da come f tende / si avvicina al suo (eventuale) asintoto verticale o come f "va" a $+\infty$ o $-\infty$.

10 — 22/02

Idea:  per calcolare $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

calcoliamo $\int_1^M f(x)\,dx$ → poi si manda M a $+\infty$

(o a generico)

Formalizziamo (Definizione): in nero i casi (1) e (2), in rosso (3) e (4):

$f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ (eventualmente $b = +\infty$), f continua

$(a, b]$ (eventualmente $a = -\infty$)

f è integrabile in senso generalizzato se esiste finito il limite

$$\lim_{M \to b^-} \int_a^M f(x)\,dx =: \int_a^b f(x)\,dx .$$

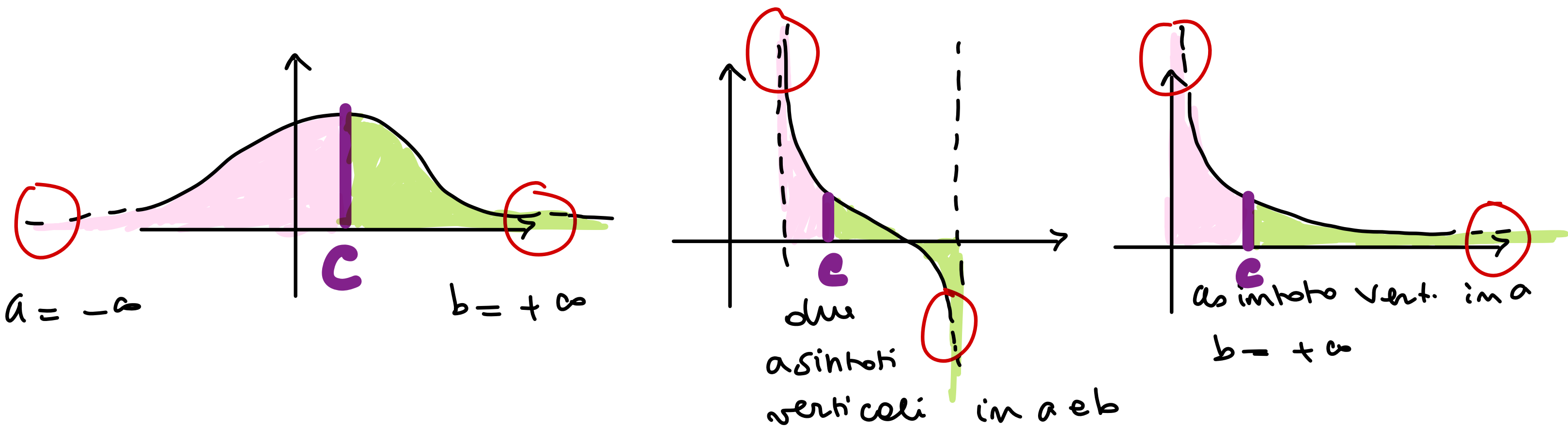
$$\lim_{M \to a^+} \int_M^b f(x)\,dx =: \int_a^b f(x)\,dx$$

Se il limite $\exists$ ma vale $+\infty$ o $-\infty$, si dice che $\int_a^b f$ diverge

Se il limite $\nexists$, si dice che f non è integrabile in senso generalizzato su (a, b).

11 – 22/02

Nel caso (5), f è int. in senso gen. in (a,b) se **entrambi** gli integrali generalizzati $\int_a^c f(x)dx$ e $\int_c^b f(x)dx$ esistono (finiti), dove c è un qualsiasi punto intermedio.

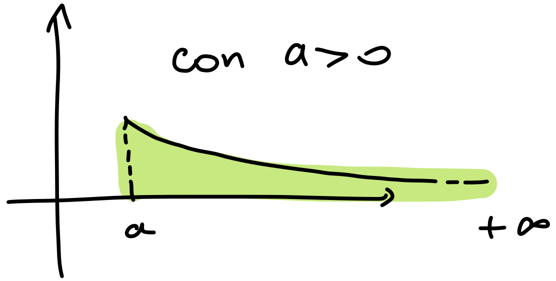


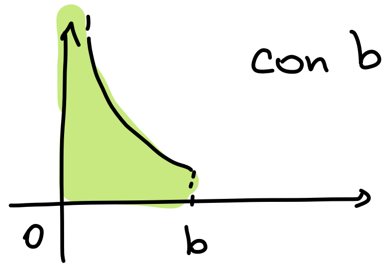
Se capita $\int_a^c f = +\infty$, $\int_c^b f = -\infty$ $\Rightarrow$ l'integrale non esiste

perché $+\infty - \infty$ è una forma indeterminata

12 – 22/02

Int. gen. di $\frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha>0$, $x>0$: ha senso studiare





ES

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \underset{(\text{se } \exists)}{=} \lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \begin{cases} \left[\ln x\right]_1^M & \text{se } \alpha=1 \\ \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^M & \text{se } \alpha\neq1 \end{cases}$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \begin{cases} \ln M & \text{se } \alpha=1 \\ \frac{M^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1} & \text{se } \alpha\neq 1 \end{cases} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha\leq 1 \\ \in\mathbb{R} & \text{se } \alpha>1 \end{cases}$$

CONCLUSIONE:
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad \alpha \le 1 \\ \in \mathbb{R} & \text{se} \quad \alpha > 1 \end{cases}$$

A parole, si dice che:

nel senso che $b = +\infty$

- la funzione $\frac{1}{x^\alpha}$ e' integrabile a $+\infty$ se e solo se $\alpha > 1$
- l'int. gen. di $\frac{1}{x^\alpha}$ a $+\infty$ diverge per $\alpha \le 1$.

ES Con conti analoghi, vediamo che, per $\alpha > 0$
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{M \to 0^+} \int_M^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad \alpha \ge 1 \\ \in \mathbb{R} & \text{se} \quad \alpha < 1 \end{cases}$$

A parole, si dice che:

nel senso che $a = 0$

- la funzione $\frac{1}{x^\alpha}$ e' integrabile vicino a 0 se e solo se $\alpha < 1$
- l'int. gen. di $\frac{1}{x^\alpha}$ vicino a 0 diverge per $\alpha \ge 1$.