ISTITUZIONI DI MATEMATICA I 18/04/2024

Programma di oggi: Esercizi della scheda n. 9, Integrali doppi

1 in $\mathbb{R}^3$

$$W = \text{span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}6\\3\\1\end{pmatrix}}_{w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}}_{w_2}\right) \qquad Z = \text{span}\underbrace{\begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix}}_{z}$$

- $\mathbb{R}^3 = W \oplus Z$?

Richiamo: $\mathbb{R}^3 = W \oplus Z$ se $\mathbb{R}^3 = W + Z$, $W \cap Z = \{0\}$.

$\dim W = 2$ (perché i gen. sono lin. indip.)

$\dim Z = 1$ (perché il gen. non è $\underline{0}$)

Ci basta ver. che $W \cap Z = \{\underline{0}\}$:

$v \in W \cap Z \iff v = \alpha z = \beta w_1 + \gamma w_2$ per qualche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Se $\alpha = 0 \Rightarrow v = 0$, se $\alpha \neq 0 \Rightarrow z = \tilde{\beta} w_1 + \tilde{\gamma} w_2$ per qualche $\tilde{\beta}, \tilde{\gamma} \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix} = \tilde{\beta}\begin{pmatrix}6\\3\\1\end{pmatrix} + \tilde{\gamma}\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3 = 6\tilde{\beta} + 2\tilde{\gamma} \\ 7 = 3\tilde{\beta} + 5\tilde{\gamma} \\ 1 = \tilde{\beta} + \tilde{\gamma} \end{cases}$$ non ha soluzione

Quindi $W \cap Z = \{0\}$.

2 - 18/04

- Matrici associate alle proiezioni su W e Z:

Richiamo $\mathbb{R}^3 = W \oplus Z$

$\forall v \in \mathbb{R}^3 \quad \exists!\ w \in W,\ \exists!\ z \in Z$ tc $v = w + z$.

$\exists\ p, q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineari tc $p(v) = w$, $q(v) = z$.

Siano P, Q le matrici 3×3 associate, cioè tc $p(v) = Pv$, $q(v) = Qv$.

$$\mathcal{B} = \{ \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{base di } W}, \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{base di } Z} \} \quad \text{base di } \mathbb{R}^3$$

Chiamiamo $v_1 := \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sia $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow v = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x e_1 + y e_2 + z e_3$

Scriviamo e_i come comb. lin. di v_1, v_2, v_3: risolvendo i sistemi associati arriviamo a

$$e_1 = \frac{2}{10} v_1 - \frac{4}{10} v_2 + \frac{2}{10} v_3$$

$$e_2 = -\frac{1}{10} v_1 - \frac{3}{10} v_2 + \frac{4}{10} v_3$$

$$e_3 = \frac{1}{10} v_1 + \frac{33}{10} v_2 - \frac{24}{10} v_3$$

3 - 18/04

$$w = P(v)$$

$$\Rightarrow v = \left[\frac{2}{10} x\, v_1 - \frac{4}{10} x\, v_2 - \frac{y}{10} v_1 - \frac{3y}{10} v_2 + \frac{z}{10} v_1 + \frac{33}{10} z\, v_2 \right]$$

$$+ \left[\frac{2}{10} x\, v_3 + \frac{4}{10} y\, v_3 - \frac{24}{10} z\, v_3 \right] \qquad z = Q(v)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -12 & 72 \\ -14 & -18 & 168 \\ -2 & -4 & 34 \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & 12 & -72 \\ 14 & 28 & -168 \\ 2 & 4 & -24 \end{pmatrix}}_{Q} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

P e Q sono le due matrici associate alle due proiezioni.

- Proprietà:

$$P v_1 = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -12 & 72 \\ -14 & -18 & 168 \\ -2 & -4 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1$$

$$P v_2 = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -12 & 72 \\ -14 & -18 & 168 \\ -2 & -4 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = v_2$$

$$Pv_3 = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -12 & 72 \\ -14 & -18 & 168 \\ -2 & -4 & 34 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$\Rightarrow$ p è l'identità su W, p si annulla su Z

Analogamente: $Qv_1 = 0$, $Qv_2 = 0$, $Qv_3 = v_3$

$\Rightarrow$ q si annulla su W, q è l'identità su Z

Inoltre: $P+Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P \times P = P$, $Q \times Q = Q$.

3 $X = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \}$

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$; $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono basi perché: i due generatori sono linearmente indipendenti (non sono uno multiplo dell'altro) ed appartengono ad X (soddisfano la condizione che caratterizza lo spazio) $\Rightarrow$ generano un sottospazio di dimensione 2 in X. Poiché X stesso ha dimensione 2 si ottiene che i sottospazi generati sono tutto X.

5_18/04

Matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$:

$$\underset{(v_1, v_2)}{\mathcal{B}} \xrightarrow{M} \underset{(v_1', v_2')}{\mathcal{B}'}$$

M matrice 2×2

Richiamo $\quad v_j' = \sum_{i=1}^{2} M_{ij} v_i$

$$v_1' = M_{11} v_1 + M_{21} v_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = M_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + M_{21} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{11} = 5 \Rightarrow M_{21} = -1$$

$$v_2' = M_{12} v_1 + M_{22} v_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = M_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + M_{22} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{12} = -8$$

$$\Rightarrow M_{22} = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{M = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}$$

Matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$:

$$\underset{(v_1', v_2')}{\mathcal{B}'} \xrightarrow{N} \underset{(v_1, v_2)}{\mathcal{B}}$$

N matrice 2×2

Richiamo $\quad v_j = \sum_{i=1}^{2} N_{ij} v_i'$

6 – 18/04

$$v_1 = N_{11} v_1' + N_{21} v_2' \qquad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = N_{11}\begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix} + N_{21}\begin{pmatrix}-8\\7\\1\end{pmatrix}$$

$$v_2 = N_{12} v_1' + N_{22} v_2' \qquad \begin{pmatrix}0\\5\\3\end{pmatrix} = N_{12}\begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix} + N_{22}\begin{pmatrix}-8\\7\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow N = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}3 & 8\\1 & 5\end{pmatrix}$$

Verifichiamo che $N = M^{-1}$:

$$M \times N = \begin{pmatrix}5 & -8\\-1 & 3\end{pmatrix} \times \frac{1}{7}\begin{pmatrix}3 & 8\\1 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \text{sì.}$$

Verifichiamo $[v]_{B'} = M^{-1}[v]_B$ per $v = \begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$.

Richiamo: $[v]_{B'}$ sono le due coordinate di $v \in X$ rispetto alla base B'.
Idem per $[v]_B$.

$$v = \begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\5\\3\end{pmatrix} \Rightarrow [v]_B = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix} = \frac{5}{7}\begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix} + \frac{4}{7}\begin{pmatrix}-8\\7\\1\end{pmatrix} \Rightarrow [v]_{B'} = \begin{pmatrix}5/7\\4/7\end{pmatrix}$$

$$M^{-1}[v]_B = N\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}3 & 8\\1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/7\\4/7\end{pmatrix} = [v]_{B'}$$

7 - 18/04

5 $\mathcal{B} = ?$, sia $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ base canonica.

Cerchiamo $\mathcal{B}$ tc $[x]_{\mathcal{B}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{[x]_{\mathcal{B}'}} = M [x]_{\mathcal{B}'}$

Cioè M è la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

Allora $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ e $e_j = \sum_{i=1}^{2} M_{ij} v_i$ $\quad v_j = \sum_{i=1}^{2} (M^{-1})_{ij} e_i$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = M_{11} v_1 + M_{21} v_2 = 3v_1 - 4v_2$

$\Rightarrow (\dots)$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = M_{12} v_1 + M_{22} v_2 = -5v_1 + 7v_2$

7 $f : \underset{\mathcal{B}}{V} \longrightarrow \underset{\mathcal{C}}{W}$ $\quad \mathcal{B}$ base di V, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$

$\mathcal{C}$ base di W, $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$

Richiamo $\quad A := [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ matrice associata

alla app. lineare f è caratterizzata da: $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} A_{ij} w_i$

8 _ 18|04

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 5-1 \\ 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \underbrace{-4}_{A_{11}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \underbrace{+8}_{A_{21}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(v_2) = \begin{pmatrix} -1-1 \\ 0+1 \\ 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \underbrace{-3}_{A_{12}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \underbrace{+4}_{A_{22}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Con $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{C}'$ $\Longrightarrow$ $A' := [f]^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{B}'}$

$$f(v_1') = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 10-1 \\ 9+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} = \underbrace{13}_{A'_{11}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \underbrace{-2}_{A'_{21}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(v_2') = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 5-2 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{-1}_{A'_{12}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \underbrace{+2}_{A'_{22}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad A' = \begin{pmatrix} 13 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrici di cambiam. di base : $\mathcal{B} \xrightarrow{M} \mathcal{B}'$, $\mathcal{C} \xrightarrow{X} \mathcal{C}'$

$$v_j' = \sum_i M_{ij} v_i \qquad w_j' = \sum_i X_{ij} w_i$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underset{M_{11}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underset{M_{21}}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underset{M_{12}}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underset{M_{22}}{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boxed{M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underset{X_{11}}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \underset{X_{21}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underset{X_{12}}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \underset{X_{22}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}$$

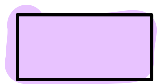
$$A' \overset{?}{=} X^{-1} A M \iff X A' = A M$$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -13+2 & 1-2 \\ 26-6 & -2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -1 \\ 20 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8-3 & -4+3 \\ 16+4 & 8-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -1 \\ 20 & 4 \end{pmatrix}$$

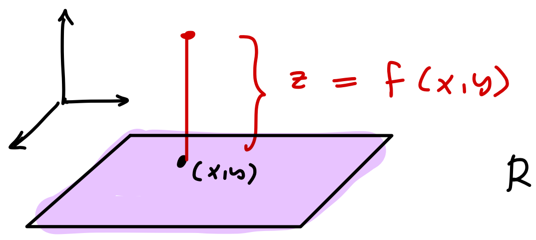
INTEGRALI DOPPI



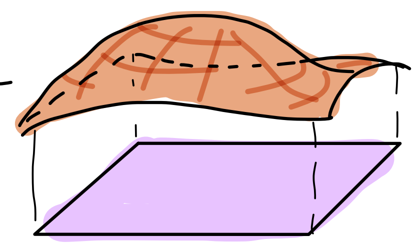
R

<u>Motivazione</u> Sia R un rettangolo di $\mathbb{R}^2$, sia $f : R \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$

Ad ogni $(x,y) \in R$ (sul piano orizzontale) associamo una quota verticale $z = f(x,y)$.



$\Rightarrow$ descriviamo una superficie

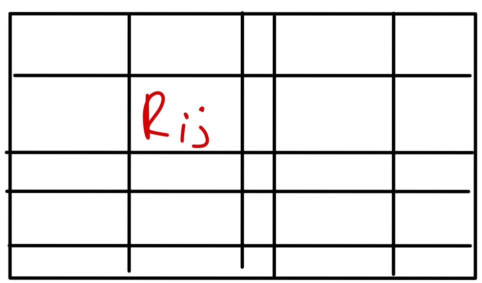


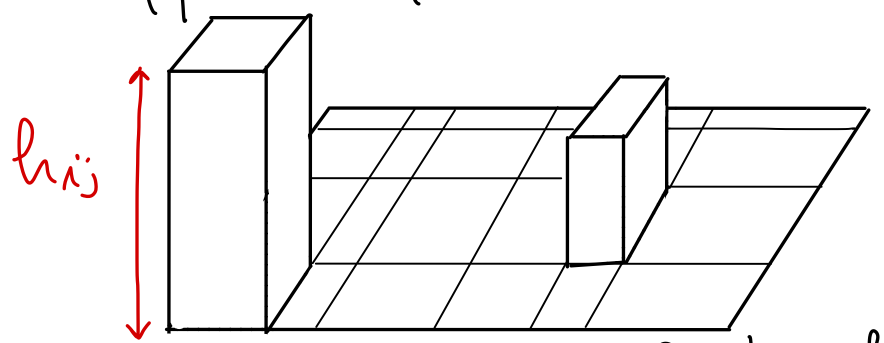
$R \subset \mathbb{R}^2$

Obiettivo: vogliamo calcolare il volume V tra la superf. ed il rettangolo sul piano orizzontale.

Sappiamo calcolare volumi (solo) di parallelepipedi $\Rightarrow$ possiamo approssimare per eccesso e per difetto il volume che cerchiamo calcolando volumi di unioni di parallelepipedi.

Def. <u>Pluriparalleleppedo</u> è una unione di parallelepipedi di tipo:





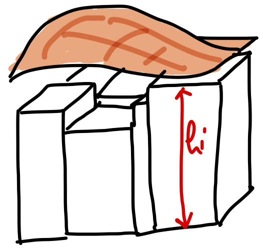
R suddiviso in rettangoli

in ogni R_{ij} fissiamo una quota h_{ij}

11 _ 18/04

Approssimazione per difetto:

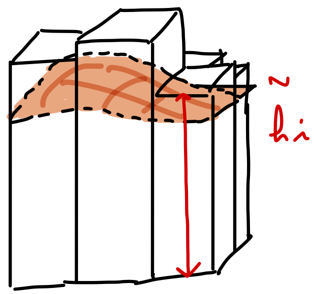
Consideriamo un pluriparallelepipedo P con $h_{ij} \leq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in R_{ij}$



$$\Rightarrow \quad V \quad \geq \quad \text{Volume}(P) = \sum_{ij} \text{Area}(R_{ij}) \cdot h_{ij}$$

Appross. per eccesso:

Consideriamo un pluriparallelepipedo $\tilde{P}$ con $\tilde{h}_{ij} \geq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in R_{ij}$



$$\Rightarrow \quad V \quad \leq \quad \text{Volume}(\tilde{P}) = \sum_{ij} \text{Area}(R_{ij}) \cdot \tilde{h}_{ij}$$

Def. Si dice che $f \geq 0$ è integrabile su R se

$$\sup_{P} V(P) = \inf_{\tilde{P}} V(\tilde{P})$$

- con P e $\tilde{P}$ come sopra.

In tal caso, il valore di inf = sup si indica con $\boxed{\iint_R f(x,y)\,dx\,dy.}$

Generalizzazioni: come nel caso di 1 variabile,

- Integrale di f (con segno) su R rettangolo

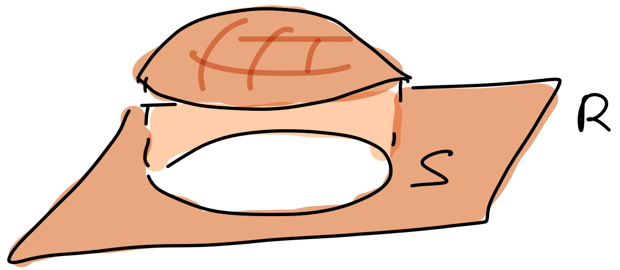
$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy := \iint_R f_+(x,y)\,dx\,dy - \iint_R f_-(x,y)\,dx\,dy$$

– con $f_+ := \max(f,0)$, $f_- := -\min(f,0)$

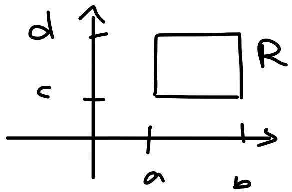
- Integrale di f su S non rettangolare:

$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy := \iint_R \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy \quad ,$$

con R rettangolo contenente S, $\tilde{f} := \begin{cases} f & \text{in } S \\ 0 & \text{in } R \setminus S \end{cases}$



Tecniche di calcolo



1. $R = [a,b] \times [c,d]$ rettangolo, f continua

Ricordiamo che $[a,b] \times [c,d] = \{a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx}$$

13_18/09

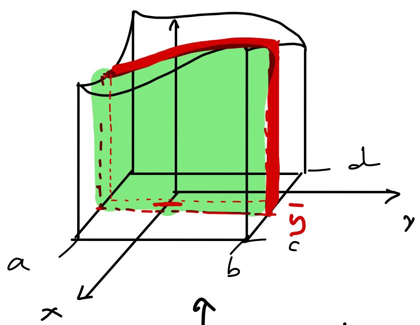
Cioè concateniamo 2 int. di 1 variabile.

oss. in $\int_a^b f(x,y)\,dx$ la y gioca il ruolo di un parametro.

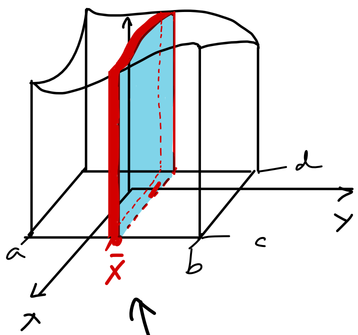
Dopo l'integrazione la x "sparisce" $\Rightarrow$ il risultato è una funzione di y.

Idem per $\int_c^d f(x,y)\,dy$: qui la x gioca il ruolo di un parametro, dopo l'integrazione la y "sparisce" ed il risultato è una funzione di x.

oss. Questo tipo di conto corrisponde al calcolo del volume per strati verticali, rispettivamente nei due modi seguenti



Area $= \int_a^b f(x,\bar{y})\,dy$



Area $= \int_c^d f(\bar{x},y)\,dy$

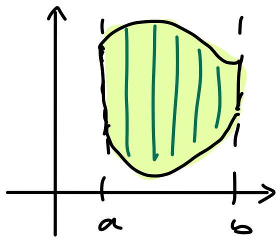
14 _ 18/04

2. S "semplice", f continua.

della forma

$$S = \{ a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x) \}$$

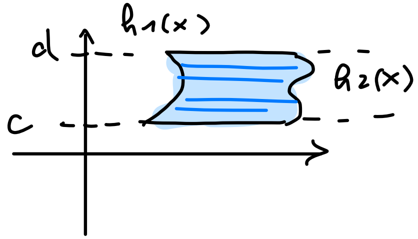
unione di segmenti verticali



o

$$S = \{ c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y) \}$$

unione di segmenti orizzontali



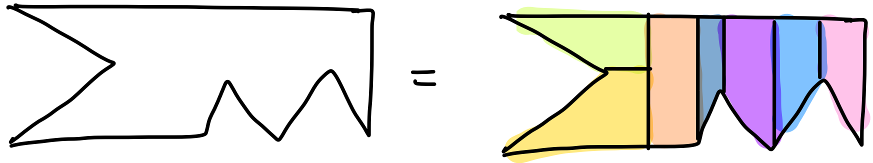
1° caso $\Longrightarrow$ $$\boxed{\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx}$$

2° caso $\Longrightarrow$ $$\boxed{\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy}$$

15 _18/04

OSS. Se $S = S_1 \cup \dots \cup S_{10}$ unione finita di insiemi semplici che si intersecano al più sulla frontiera $\Rightarrow \iint_S \dots = \sum_i \iint_{S_i} \dots$

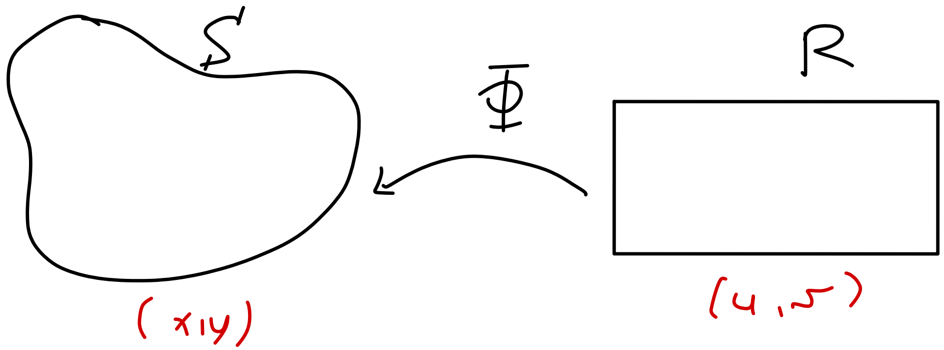
ad es.



3. Cambio di variabile

$S = \Phi(R)$, $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Φ iniettiva e suriettiva da R in S, Φ di classe C^1



$$(x,y) = \Phi(u,v) = \left(\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v)\right) \Rightarrow \begin{cases} x = \Phi_1(u,v) \\ y = \Phi_2(u,v) \end{cases}$$

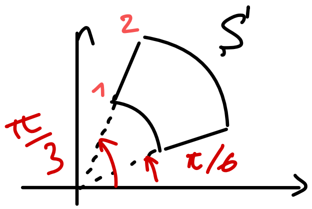
Formula:

$$\boxed{\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f(\Phi(u,v))\,\left|\det J_\Phi(u,v)\right|\,du\,dv}$$

- con $J_\Phi(u,v)$ matrice Jacobiana di Φ

Richiamo $\quad J_\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \end{pmatrix}$

Es. Coord. polari $\quad \Phi(\rho,\theta) = (\underbrace{\rho\cos\theta}_{x=\Phi_1(\rho,\theta)}, \underbrace{\rho\sin\theta}_{y=\Phi_2(\rho,\theta)}) = (x,y)$



$S = \Phi(R)$ con $R = \left\{ 1 \le \rho \le 2, \ \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3} \right\}$ rettangolo

$|\det J_\Phi(\rho,\theta)| = \rho \quad \Rightarrow \quad \boxed{dx\,dy \rightsquigarrow \rho\, d\rho\, d\theta}$