Note sulle equazioni differenziali ordinarie

Riferimenti bibliografici: Robert A. Adams: Calcolo differenziale 2; Paolo Marcellini & Carlo Sbordone: Analisi Matematica 1

Introduzione

Un'equazione differenziale è un'equazione che coinvolge una o più derivate di una funzione incognita, cioè un'espressione del tipo

$$F(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \quad \forall x \in I,$$

dove F è una funzione dipendente da $n+1$ variabili e $y^{(k)}$ è la derivata k-esima della funzione incognita $y(x)$ nella variabile $x \in I$. Molte leggi della Fisica sono descritte da questo tipo di equazioni: ad esempio (cambiando momentaneamente la notazione per la funzione incognita e per la variabile), la traiettoria di un corpo di massa m che si muove su una retta per l'azione di una forza F è descritta da una funzione $x(t)$ (la coordinata sulla retta al tempo t) che soddisfa

$$mx''(t) = F.$$

Nel caso particolare in cui la forza sia elastica, data dalla connessione del corpo con una molla di costante elastica k, si ha $F = -kx(t)$, da cui

$$mx''(t) = -kx(t).$$

O ancora, la crescita (che spesso sentiamo definire "esponenziale", poi capiremo perché) di una popolazione di batteri nel tempo è descritta da un'equazione del tipo

$$p'(t) = Cp(t).$$

L'obiettivo del nostro studio è trovare la funzione o le funzioni che soddisfano un'equazione differenziale.

Un po' di vocabolario

Le equazioni differenziali di funzioni di una variabile si chiamano equazioni differenziali *ordinarie*, abbreviate in EDO. Noi tratteremo solo queste, ma è bene sapere che esistono equazioni differenziali in cui le funzioni coinvolte dipendono da più variabili e in cui le derivate sono derivate parziali: queste equazioni differenziali si chiamano *alle derivate parziali*, abbreviate con EDP.

Si definisce *ordine* di una EDO la derivata di ordine massimo presente nell'equazione. Ad esempio

$$\begin{aligned} &y'''(x) - x^2 y'(x) + \sin(x-3) = 1 \quad \text{è di ordine 3,} \\ &y' - y^{(50)}(x) = 0 \quad \text{è di ordine 50.} \end{aligned}$$

Una EDO si dice *lineare* se è della forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x)y(x) = f(x).$$

Ad esempio

$$\begin{aligned} &x^3 y''(x) - \cos(x)y(x) = 5 \quad \text{è lineare,} \\ &x^3[y'(x)]^2 - e^{y(x)} = 2 \quad \text{non è lineare.} \end{aligned}$$

La parola "lineare" non è scelta a caso! Corrisponde infatti a dire che la "funzione" (si chiama operatore differenziale) $\mathcal{P}$ definita da

$$\mathcal{P}(y) := a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x)y(x)$$

è lineare nella funzione y.

Una EDO si dice *omogenea* se tutti i suoi termini coinvolgono la funzione incognita y o le sue derivate. Ad esempio

$$\begin{aligned} xy''(x) - y(x) = 0 &\quad \text{è omogenea,} \\ y''(x) + e^x y'(x) = \ln(x^2+5) &\quad \text{non è omogenea.} \end{aligned}$$

Risolvere un'equazione differenziale

Risolvere un'equazione differenziale significa trovare la (o le) funzioni $y(x)$ in un dato intervallo che soddisfano l'equazione. Nel seguito ci occupiamo di risolvere alcune particolari classi di equazioni differenziali:

- lineari del primo ordine:

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x),$$

- di Bernoulli:
$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^{\alpha}(x),$$
- a variabili separabili:
$$y'(x) = f(x)g(y(x)),$$
- lineari del secondo ordine a coefficienti costanti:
$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x).$$

In generale la risoluzione di un'equazione differenziale è un compito impossibile! Spesso ci si deve accontentare di dare una buona approssimazione delle soluzioni con metodi numerici.

Il problema di Cauchy

Come vedremo, le equazioni differenziali hanno infinite soluzioni, che dipendono dalle costanti derivanti da integrazioni indefinite. Spesso, soprattutto nelle applicazioni della Fisica, un'equazione differenziale è accompagnata da una famiglia di condizioni iniziali: negli esempi citati nell'introduzione, è ragionevole supporre che possiamo misurare posizione e velocità del corpo attaccato alla molla all'inizio dell'esperimento, o, analogamente, che possiamo quantificare la popolazione di batteri ad un certo istante temporale. Questi dati, messi a sistema con l'equazione differenziale, formano il *Problema di Cauchy*. Nel caso di equazioni differenziali del primo e del secondo ordine, nel Problema di Cauchy si prescrivono, rispettivamente, 1 e 2 condizioni iniziali:

$$\begin{cases} F(y'(x), y(x), x) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} F(y''(x), y'(x), y(x), x) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = v_0. \end{cases}$$

Per convenzione, chiamiamo: istante iniziale x_0, posizione iniziale y_0, velocità iniziale v_0.

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

L'equazione in forma canonica è
$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x),$$
dove $a(x)$ e $b(x)$ funzioni continue assegnate, su in intervallo fissato.

Le soluzioni sono

$$y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x) \, \mathrm{d}x$$

dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$. Le soluzioni sono infinite e dipendono dalla costante derivante dall'integrazione indefinita.

Il problema di Cauchy associato ha invece un'unica soluzione: si determina trovando l'unica soluzione, tra le infinite trovate prima, che soddisfa la condizione iniziale assegnata.

Esempio 0.1. *Risolvere l'equazione differenziale*

$$y'(x) = \sin(x) y(x).$$

In questo caso $a(x) = \sin(x)$, $b(x) \equiv 0$. Quindi

$$A(x) = -\cos(x), \qquad \int b(x) \, \mathrm{d}x = \int 0 \, \mathrm{d}x = C \quad \text{con } C \in \mathbb{R},$$

quindi la soluzione generica è

$$y(x) = Ce^{-\cos(x)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che la descrizione delle soluzioni non dipende dalla primitiva A di a scelta.

Esempio 0.2. *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{xy+1}{x^2} \\ y(2) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

La formula con $a(x) = 1/x$ e $b(x) = 1/x^2$ fornisce come soluzione generica

$$y(x) = -\frac{1}{2x} + Cx, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(2) = 1/4$ otteniamo

$$\frac{1}{4} = y(2) = -\frac{1}{4} + 2C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{4}.$$

La (unica) soluzione del Problema di Cauchy è

$$y(x) = -\frac{1}{2x} + \frac{x}{4}.$$

Equazioni di Bernoulli

Un'equazione *di Bernoulli* è della forma

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^{\alpha}(x), \tag{1}$$

con $a(x)$ e $b(x)$ funzioni continue in uno stesso intervallo, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0, 1$. Osserviamo che per tali valori di α l'equazione differenziale non è lineare (mentre per $\alpha = 0, 1$ sarebbe lineare e rientreremmo nel caso precedente).

La strategia risolutiva è la seguente: le soluzioni non identicamente nulle, se ammissibili, si trovano dividendo l'equazione per y^{α}. ci si riconduce ad un'equazione differenziale nella funzione ausiliaria (incognita)

$$z(x) := [y(x)]^{1-\alpha}.$$

Questo procedimento, che illustreremo negli esempi, porta a trovare le soluzioni, che sono:

i) la funzione identicamente nulla $y(x) \equiv 0$, ammissibile solo se $\alpha > 0$ (altrimenti implicitamente esclusa dalla presenza di y a denominatore);

e

ii) le funzioni
$$y(x) = [z(x)]^{1/(1-\alpha)},$$
con $z(x)$ soluzione (ce ne sono infinite) dell'equazione differenziale lineare
$$z'(x) = (1-\alpha)a(x)z(x) + (1-\alpha)b(x).$$

Il problema di Cauchy associato si risolve imponendo la condizione iniziale. In particolare, se $y_0 = 0$ allora la soluzione è la funzione identicamente nulla e non serve procedere con la ricerca di z.

Esempio 0.3. *Risolvere l'equazione differenziale*

$$y'(x) = x(y - y^3).$$

Si tratta di un'equazione di Bernoulli, con $a(x) = x$, $b(x) = -x$, $\alpha = 3$. La funzione $y \equiv 0$ è soluzione. Cerchiamo soluzioni non nulle: dividendo per y^{α}, cioè y^3, ponendo $z = y^{1-\alpha}$, cioè $z = y^{-2}$, e tenendo conto che $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, otteniamo l'equazione lineare in z

$$z'(x) = -2xz(x) + 2x.$$

Una primitiva di $-2x$ è $-x^2$, quindi

$$z(x) = e^{-x^2} \int 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = e^{-x^2}[e^{x^2} + C] = 1 + Ce^{-x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ricaviamo quindi

$$y(x) = \pm(1 + Ce^{-x^2})^{-1/2}.$$

Osserviamo che la costante C e l'intervallo in cui esiste tale y sono legati, perché deve avere senso la potenza $(1 + Ce^{-x^2})^{-1/2}$. In conclusione, (tutte) le soluzioni del problema di partenza sono

$$y(x) \equiv 0, \quad y(x) = \pm(1 + Ce^{-x^2})^{-1/2}.$$

Equazioni a variabili separabili.

Un'equazione di questo tipo è scrivibile nella forma

$$y'(x) = f(x)g(y(x)),$$

con $f(x)$ e $g(y)$ funzioni continue.

Le soluzioni sono:

i) le soluzioni stazionarie: $y(x) \equiv C$ con C tale che $g(C) = 0$. Queste possono non esistere (se g non si annulla mai) o non essere uniche (se g si annulla in più punti);

e

ii) le soluzioni non stazionarie, descrivibili implicitamente da

$$G(y(x)) = F(x) + C,$$

con $F(x)$ primitiva di $f(x)$ e $G(y)$ primitiva di $1/g(y)$, pensando y come variabile indipendente. Talvolta, se si conosce l'inversa di G, è possibile scrivere la soluzione y esplicitamente. Queste soluzioni si ricavano dividendo l'EDO per $g(y(x))$ e integrando:

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Il problema di Cauchy si risolve imponendo la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$. In particolare, se $g(y_0) = 0$ allora la soluzione è stazionaria $y \equiv y_0$ e non serve procedere cercando le primitive F e G.

Esempio 0.4. *Risolvere l'equazione differenziale*

$$y'(x) = x(y-1)^2.$$

Con la notazione precedente abbiamo $f(x) = x$, $g(y) = (y-1)^2$.

Sono presenti soluzioni stazionarie: poiché $g(1) = 0$ otteniamo che $y(x) \equiv 1$ è soluzione.

Cerchiamo le soluzioni non stazionarie. Dividendo per $(y-1)^2$ e integrando rispetto ad x otteniamo

$$\int \frac{y'(x)}{(y(x)-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x.$$

Facendo il cambio di variabile $y = y(x)$ otteniamo

$$\int \frac{1}{(y-1)^2}\,\mathrm{d}y = \int x\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y-1} = \frac{x^2}{2} + C.$$

L'ultima relazione, implicita in y, si può rendere esplicita:

$$y(x) = 1 - \frac{1}{x^2/2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Anche qui, il valore di C e l'intervallo di esistenza della $y(x)$ sono legati, perché il denominatore non può annullarsi.

Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

L'equazione in forma canonica è

$$(E) \quad y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x),$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, f funzione continua su un intervallo fissato.

Per la risoluzione dell'equazione differenziale è di cruciale importanza studiare la cosiddetta *equazione omogenea associata*, ottenuta eliminando il termine noto $f(x)$:

$$(H) \quad y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0.$$

Per distinguere le soluzioni di (E) dalle soluzioni di (H) useremo la lettera y per le prime, y_H per le seconde.

Soluzioni dell'equazione omogenea.

Teorema 0.5. *L'insieme V_H di soluzioni di (H) è uno spazio vettoriale.*

Dimostrazione. È immediato verificare l'insieme

$$V_H := \{y : I \to \mathbb{R} \ : \ y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0\}$$

è un sottoinsieme delle funzioni da I in $\mathbb{R}$ che contiene lo zero (la funzione identicamente nulla), è chiuso per somma e per prodotto per scalare. □

Lo spazio V_H ha dimensione 2 (non lo dimostriamo). Per scrivere i generatori, è necessario introdurre la *equazione caratteristica*:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{2}$$

Si tratta dell'equazione algebrica di secondo grado nella variabile λ, ottenuta sostituendo y'' con λ^2, y' con λ e y con 1 nell'equazione omogenea (H).

Posto $\Delta = a^2 - 4b$ il discriminante, le radici λ_1, λ_2 di (2) sono:

$$\begin{aligned}
\Delta > 0 \quad &\Rightarrow \quad \lambda_1, \lambda_2 \quad \text{reali e distinte,} \\
\Delta = 0 \quad &\Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 \quad \text{reali e coincidenti,} \\
\Delta < 0 \quad &\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \quad \text{complesse coniugate.}
\end{aligned}$$

Teorema 0.6. *Lo spazio V_H è di dimensione 2. Più precisamente,*

$$\begin{aligned}
\Delta > 0 \quad &\Rightarrow \quad V_H = \{y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \ : \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}, \\
\Delta = 0 \quad &\Rightarrow \quad V_H = \{y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} \ : \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}, \\
\Delta < 0 \quad &\Rightarrow \quad V_H = \{y(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x) \ : \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Esempio 0.7. *Trovare le soluzioni di*

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad & y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0, \\
\text{(ii)} \quad & y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0, \\
\text{(iii)} \quad & y''(x) + y(x) = 0.
\end{aligned}$$

Le equazioni caratteristiche e le loro radici sono:

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad & \lambda^2 - \lambda - 6 = 0\,, \quad \text{radici: } \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -2, \\
\text{(ii)} \quad & \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0\,, \quad \text{radici: } \lambda_1 = \lambda_2 = -1, \\
\text{(iii)} \quad & \lambda^2 + 1 = 0\,, \quad \text{radici: } \lambda_{1,2} = \pm i.
\end{aligned}$$

Da cui ricaviamo le soluzioni:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}, \\ &\text{(ii)} \quad y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}, \\ &\text{(iii)} \quad y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x), \end{aligned}$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Soluzioni dell'equazione non omogenea.

Come già sottolineato più volte, le soluzioni di (E) sono infinite. Utilizziamo la lettera y per indicare la soluzione generica, dipendente da costanti. Nel seguito indichiamo con y_P *una* soluzione di (E), ossia una soluzione dell'equazione corrispondente ad una scelta particolare delle costanti. Chiameremo tale y_P *soluzione particolare.*

Teorema 0.8. *Sia y_P una soluzione particolare di (E). Ogni altra soluzione y di (E) è della forma*

$$y(x) = y_P(x) + y_H(x), \quad \text{con } y_H \in V_H.$$

Dimostrazione. È sufficiente verificare che la differenza $y(x) - y_P(x)$ è soluzione di (H). Questo è vero per linearità della derivata:

$$\begin{aligned} &(y - y_P)'' + a(y - y_P)' + b(y - y_P) \\ &= y'' + ay' + by - (y_P'' + ay_P' + by_P) \\ &= f(x) - f(x) = 0. \end{aligned}$$

□

Per descrivere tutte le soluzioni di (E) ci basta quindi trovare una soluzione particolare y_P.

Determinazione di una soluzione particolare.

Indichiamo ora come ricercare una soluzione particolare di (E), esaminando preliminarmente alcuni casi di semplice risoluzione. Indichiamo in questa lista la tipologia di funzione tra cui cercare y_P: la forma esatta di y_P si otterrà imponendo la validità di (E). Casi particolari:

i) $f(x) =$ polinomio di grado N, $b \neq 0 \Rightarrow y_P =$ polinomio di grado N

ii) $f(x) =$ polinomio di grado N, $b = 0 \Rightarrow y_P =$ polinomio di grado $N+1$

iii) $f(x)$ = combinazione lineare di $\sin(x)$ e $\cos(x) \Rightarrow y_P$ = combinazione lineare di $\sin(x)$ e $\cos(x)$

iv) $f(x)$ = multiplo di e^{Mx}, M non risolve l'equazione caratteristica $\Rightarrow$ y_P = multiplo di e^{Mx}

Lo stesso metodo si può applicare a somme o prodotti di tali funzioni, cercando y_P dello stesso tipo.

Un metodo generale per determinare una soluzione particolare è il metodo della *variazione delle costanti*: date y_1 e y_2 due funzioni che generano V_H, possiamo cercare y_P della forma

$$y_P(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x),$$

dive c_1 e c_2 sono due soluzioni (particolari) del sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases}$$

Esempio 0.9. *Trovare le soluzioni di*

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad y''(x) - y'(x) - 6y(x) = x^3, \\ &\text{(ii)} \quad y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \cos(x), \\ &\text{(iii)} \quad y''(x) + y(x) = 1/\sin(x). \end{aligned}$$

Nell'esercizio precedente abbiamo già determinato le soluzioni dell'equazione omogenea associata. Cerchiamo una soluzione particolare.

Per (i): il termine noto $f(x)$ è un polinomio di grado 3. Cerchiamo quindi y_P tra i polinomi di grado 3:

$$y_P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

con A, B, C, D costanti da determinare. Imponendo che y_P soddisfi l'equazione troviamo

$$A = -1/6, B = 1/12, \ C = -7/36, \ D = 13/216.$$

Quindi le soluzioni dell'equazione sono:

$$y(x) = y_P + y_H = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{12} - \frac{7}{36}x + \frac{13}{216} + C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Per (ii): il termine noto $f(x)$ è una funzione trigonometrica. Cerchiamo y_P combinazione lineare di seno e coseno:

$$y_P(x) = A\sin x + B\cos x.$$

Imponendo che y_P soddisfi l'equazione troviamo

$$-2B\sin(x) + 2A\cos(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}\,,\ B = 0.$$

Quindi le soluzioni dell'equazione sono:

$$y(x) = y_P + y_H = \frac{1}{2}\sin(x) + C_1e^x + C_2xe^x\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Per (iii): utilizziamo il metodo della variazione delle costanti. Cerchiamo y_P della forma

$$y_P(x) = c_1(x)\cos(x) + c_2(x)\sin(x),$$

con $c_i(x)$ tali che

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos(x) + c_2'(x)\sin(x) = 0 \\ -c_1'(x)\sin(x) + c_2'(x)\cos(x) = \frac{1}{\sin(x)}. \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per $\cos(x)$ e la seconda per $-\sin(x)$, sommando le due equazioni, otteniamo $c_1'(x) = -1$ e $c_2'(x) = \cos(x)/\sin(x)$. Una primitiva (ricordiamoci che basta trovare *una* soluzione particolare) è

$$c_1(x) = -x, \quad c_2(x) = \ln|\sin(x)|.$$

Concludiamo quindi che le soluzione dell'equazione sono

$$y(x) = y_P + y_H = -x\cos(x) + \sin(x)\ln|\sin(x)| + C_1\cos(x) + C_2\sin(x)\,,$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.