ISTITUZIONI DI MATEMATICA I, 16/05

4 TIPI DI EQUAZIONI DIFF. ORDINARIE DI ORDINE 1 E 2.

$\boxed{1}$ EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DI ORDINE 1

EQUAZIONE

$$\boxed{y'(x) = a(x)y(x) + b(x)} \longrightarrow$$

con a e b funzioni continue assegnate.

Formula:

$$y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x)\,dx$$

A = una primitiva di a

Se fissiamo una condizione iniziale, cioè se "misuriamo" il valore y_0 di y ad un certo istante temporale x_0, cioè se imponiamo la condizione $y(x_0)=y_0$, studiamo il cosiddetto Problema di Cauchy:

PROBLEMA DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y'(x) = a(x) + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x)\,dx \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

con a, b funzioni assegnate.
$x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ assegnati

OSS. Le soluzioni dell'equazione sono infinite (dipendono dalla costante che viene dall'integrazione indefinita). La soluzione del problema di Cauchy è unica: la costante "sparisce" fissando la condizione iniziale.

ES. $y'(x) = \frac{1}{x} y(x) + \frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow$ Le (tutte, infinite) soluzioni sono $y(x) = -\frac{1}{2x} + C x$ con $C \in \mathbb{R}$.

ES. $\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{x} y(x) + \frac{1}{x^2} \\ y(2) = \frac{1}{4} \end{cases}$ $\Rightarrow$ La soluzione si trova imponendo $y(2) = \frac{1}{4}$ in $y(x) = -\frac{1}{2x} + C$

$\Rightarrow \frac{1}{4} = -\frac{1}{2 \cdot 2} + 2C \Rightarrow C = \frac{1}{4} \Rightarrow y(x) = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{4}$.

2 EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI BERNOULLI

EQUAZIONE $\boxed{y'(x) = a(x) y(x) + b(x) y^{\alpha}(x)}$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$

altrimenti sarebbe lineare (caso precedente)

PB. DI CAUCHY $\begin{cases} \text{EQUA. DIFF.} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Risolviamo l'equazione:

- (Eventuali) soluzioni nulle.

  Se $\alpha > 0 \Rightarrow$ la funzione $y \equiv 0$ è una delle soluzioni

  (Se $\alpha < 0$ implicitamente $y \neq 0$ perché y con esponente $\alpha < 0$ è a denominatore)

- Soluzioni non nulle:

$$\xrightarrow[\text{per } y^\alpha]{\text{dividiamo}} \quad \frac{y'}{y^\alpha} = a(x)\, y^{1-\alpha} + b(x) \quad \xrightarrow[z = y^{1-\alpha}]{\text{definiamo}} \quad z' = (1-\alpha)\, y^{-\alpha}\, y' = (1-\alpha)\, \frac{y'}{y^\alpha}$$

$$\Longrightarrow \quad z' = (1-\alpha)\, a(x)\, z + (1-\alpha)\, b(x)$$

z risolve una eq. diff. lineare di ordine 1 $\Longrightarrow$ troviamo z

$\Longrightarrow$ troviamo y implicitamente o esplicitamente

OSS. Le soluzioni vanno prese tutte: sia le eventuali soluzioni nulle che le sol. non nulle.
Nel problema di Cauchy ne selezioniamo una sola.

4_16/05

ES. Risolvere $y'(x) = x\,(y - y^3)$.

E' un'equazione di Bernoulli $y'(x) = xy - xy^3$, con $\alpha = 3$.

- Soluzioni nulle? Sì: $y \equiv 0$ è soluzione
- Soluzioni $\neq 0$? Dividiamo per y^3: $y^{-3}y' = xy^{-2} - x$

Poniamo $z = y^{-2} \Rightarrow z' = -2y^{-3}y' \Rightarrow -\frac{1}{2}z' = xz - x \Rightarrow z' = -2xz + 2x$

Troviamo z: $a(x) = -2x$, $A(x) = -x^2$ (una primitiva)

$$z(x) = e^{-x^2}\int e^{x^2} 2x \, dx = e^{-x^2}\left[e^{x^2} + c\right] = 1 + c\,e^{-x^2}$$

con $c \in \mathbb{R}$.

Troviamo y: $y^2 = \dfrac{1}{1 + c\,e^{-x^2}} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\dfrac{1}{1 + c\,e^{-x^2}}}$

Conclusione: le soluzioni sono $y \equiv 0$, $y = \pm\sqrt{\dfrac{1}{1 + c\,e^{-x^2}}}$ con $c \in \mathbb{R}$

oss. $c \in \mathbb{R}$ arbitraria; $x \in I$ intervallo in cui la radice $\exists$.

ES. Risolvere il Problema di Cauchy $\begin{cases} y'(x) = x\,y(x) - x\,y^3(x) \\ y(7) = 0 \end{cases}$

Tra le soluzioni trovate nell'es. precedente, la soluzione $y \equiv 0$ è (l'unica) che soddisfa $y(7)=0$. $\Rightarrow$ Soluzione : $y \equiv 0.$

ES. Risolvere il Problema di Cauchy $\begin{cases} y'(x) = x\,y(x) - x\,y^3(x) \\ y(7) = -2 \end{cases}$

Tra le soluzioni non nulle dell'es. precedente, selezioniamo quella tale che

$$-2 = \pm\sqrt{\frac{1}{1+C\,e^{-49}}} \Rightarrow -2 = -\sqrt{\cdots} \Rightarrow 2 = \sqrt{\cdots}$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{1}{1+Ce^{-49}} \Rightarrow C = -\frac{3}{4}e^{-49} \Rightarrow \text{La soluzione è } y(x) = -\sqrt{\frac{1}{1-\frac{3}{4}e^{x^2-49}}}$$

3 EQUAZIONI DIFFERENZIALI A VARIABILI SEPARABILI

EQUAZIONE $\boxed{y'(x) = f(x)\, g(y(x))}$

PB. DI CAUCHY $\begin{cases} \text{EQUA. DIFF.} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Risolviamo l'equazione:

- (Eventuali) soluzioni stazionarie: $y \equiv c$ è soluzione se $g(c) = 0$.
- Soluzioni non stazionarie:

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x) \xrightarrow[\text{griamo in } x]{\text{inte-}} \int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,dx = \int f(x)\,dx \xrightarrow[\text{di var.}]{\text{cambio}} \int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx$$

$\longrightarrow$ troviamo y implicitamente o esplicitamente.

OSS. Le soluzioni vanno prese tutte: sia le eventuali soluzioni stazionarie che le sol. non nulle.
Nel problema di Cauchy ne selezioniamo una sola.

E' sia a variabili separabili che di Bernoulli

ES. Risolvere $y'(x) = x\,(y - y^3)$

Variabili separabili, con $f(x) = x$, $g(y) = y - y^3$.

- Sol. stazionarie: $g(c) = 0$ se $c(1-c^2) = 0 \Rightarrow y \equiv 0,\ y \equiv 1,\ y \equiv -1$

  sono 3 soluzioni stazionarie

- Sol. non stazionarie: $g(y) \neq 0$ Dividiamo per $g(y)$: $\dfrac{y'}{g(y)} = f(x)$.

Integriamo in x:

$$\int \frac{y'(x)}{y(x) - y^3(x)}\,dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\parallel$$

$$\int \frac{1}{y - y^3}\,dy = \int \frac{1}{y}\,dy - \frac{1}{2}\int \frac{1}{y+1}\,dy - \frac{1}{2}\int \frac{1}{y-1}\,dy = \ln|y| - \frac{1}{2}\ln|1+y| - \frac{1}{2}\ln|y-1|$$

$$= \ln\left(\frac{|y|}{\sqrt{|1-y^2|}}\right) \Longrightarrow \frac{|y|}{\sqrt{|1-y^2|}} = e^{\frac{x^2}{2} + c} \Rightarrow \frac{y^2}{|1-y^2|} = e^{x^2 + c}$$

Si risolve studiando i casi $|y| < 1$ e $|y| > 1$

Conclusione:
$$\begin{cases} \text{se } |y(x)|>1 \Rightarrow y(x) = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1-e^{-x^2-2c}}} \\ y(x) \equiv 1 \\ \text{Se } |y(x)|<1 \Rightarrow y(x) = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{-x^2-2c}}} \\ y(x) \equiv 0 \end{cases}$$

ES. Risolvere $y'(x) = x\,(y(x)-1)^2$.

Sol. stazionarie: $y \equiv 1$

Sol. non stazionarie: $\displaystyle\int \frac{y'}{(y-1)^2}\,dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$

$$\int \frac{y'(x)}{(y(x)-1)^2}\,dx \underset{\substack{t=y(x) \\ dt=y'(x)dx}}{=} \int \frac{1}{(y-1)^2}\,dy = -\frac{1}{(y-1)} \quad \Rightarrow \quad y(x) = 1 - \frac{1}{\frac{x^2}{2}+c}, \; c \in \mathbb{R}$$

$t = y(x)$

$dt = y'(x)dx$

(poi richiamiamo y lat)

Conclusione: le soluzioni sono $y \equiv 1$ e $y(x) = 1 - \dfrac{1}{\frac{x^2}{2}+c}$, $c \in \mathbb{R}$

ES. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'(x) = x\,(y(x)-1)^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

La sol. stazionaria 1 non va bene. Tra le sol. non stazionarie imponiamo $y(0)=2 \Rightarrow 1 - \frac{1}{C} = 2 \Rightarrow C=-1 \Rightarrow$ La soluzione è
$$\boxed{y(x) = 1 + \frac{1}{1 - x^2/2}}$$

4 EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DI ORDINE 2 A COEFFICIENTI COSTANTI

EQUAZIONE

(E) $$\boxed{y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) = f(x)}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ assegnati,
f funzione (termine noto)

PB. DI CAUCHY

$$\begin{cases} \text{EQ. DIF. DI ORDINE } 2 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = v_0 \end{cases}$$

Ne servono due!

EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA

(H) $$y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) = 0$$

SOLUZIONE DI (H)

Teorema. L'insieme delle soluzioni di (H) è uno spazio vettoriale.

Dim. Chiamiamo V_H l'insieme delle soluzioni di (H):

$$V_H = \{ y(x) \text{ funzione} \mid y'' + ay' + by = 0 \}$$

$y \equiv 0 \in V_H$, $\quad y_1, y_2 \in V_H \Rightarrow y_1 + y_2 \in V_H$, $\quad y_1 \in V_H, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda y_1 \in V_H$. □

Lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2 (non lo dimostriamo)

Per dire chi sono i generatori, definiamo

EQUAZIONE CARATTERISTICA $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

associata alla eq. diff.

ES. $\quad y'' + 7y' - y = 0 \longrightarrow \lambda^2 + 7\lambda - 1 = 0$

$\quad y'' + y = 0 \longrightarrow \lambda^2 + 1 = 0$

11 – 16/05

Teorema. Siano λ_1, λ_2 le radici (in $\mathbb{C}$) dell'eq. caratteristica associata ad (H).

Allora

Se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ radici reali distinte $\Longrightarrow V_H = \{ y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \text{ con } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \}$

Se $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ radici reali coincidenti $\Longrightarrow V_H = \{ y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}, \text{ con } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \}$

Se $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ radici complesse coniugate $\Longrightarrow V_H = \{ y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x), \text{ con } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \}$

ES. $y'' - y' - 6y = 0 \rightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \rightarrow$ radici $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$

$\Rightarrow$ le soluzioni sono $y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$ con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

ES. $y'' + 2y' + y = 0 \rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \rightarrow$ radici $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

$\Rightarrow$ le soluzioni sono $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$

ES. $y'' + y = 0 \rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow$ radici $\lambda_{1,2} = \pm i$

$\Rightarrow$ le soluzioni sono $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

SOLUZIONI DI (E)

Obiettivo: trovare <u>tutte</u> le soluzioni di (E).

$\downarrow$

Mi basta conoscere <u>una</u> soluzione di (E)
e tutte le soluzioni di (H).

Infatti: sia y_p <u>una</u> soluzione, che chiamiamo "particolare", e sia y una qualsiasi soluzione (che non conosco) $\Rightarrow$ $y - y_p \in V_H$.

$$(y-y_p)'' + a(y-y_p)' + b(y-y_p)$$
$$= (y'' + ay' + by) + (y_p'' + ay_p' + ay_p)$$
$$= f - f = 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{y(x) = y_p + \text{soluzioni di (H)}}$ } sono <u>tutte</u> le soluzioni.

<u>ES.</u> $y'' + 2y' + y = \cos x$

- (H) $y'' + 2y' + y = 0 \Rightarrow y_H(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$

- supponiamo di conoscere (per caso) $y_p = \frac{1}{2}\sin x$.

(check: $\left(\frac{1}{2}\sin x\right)'' + 2\left(\frac{1}{2}\sin x\right)' + \frac{1}{2}\sin x = \cos x \Rightarrow \frac{1}{2}\sin x$ risolve (E))

Conclusione: Le (tutte) soluzioni di (E) sono

$$y(x) = \frac{1}{2}\sin x + C_1 e^{-x} + C_2\, x e^{-x}$$

COME TROVARE y_p ?

Guardo $f(x)$ e cerco tra le funzioni imparentate

$f(x) =$ polinomio $\rightsquigarrow$ y_p la cerco tra i polinomi

$f(x) =$ sin o cos $\rightsquigarrow$ y_p la cerco tra le comb. lin. di sin. e cos.

$f(x) =$ esponenziale $\rightsquigarrow$ y_p la cerco multiplo dell'esponenziale