UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 18/9/24 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Calcolare la derivata della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \cos(\,\mathrm{e}^{-x^2})$.

2. Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3}{3n^2 + (-1)^n}$.

3. Quanti sono i possibili podi per una gara di corsa con 6 partecipanti? (Il *podio* è dato dai nomi di primo, secondo e terzo classificato.)

4. Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan(2x)}$.

5. Considerare la funzione $f : [0,2] \to [0,8]$ data da $f(x) = 6x - x^2$. Supponendo noto che è invertibile con inversa $g = f^{-1}$ derivabile, verificare che $f(1) = 5$ e calcolare $g'(5)$. Dimostrare quindi che è effettivamente invertibile con inversa derivabile.

6. Considerare le funzioni $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ date da $f(x) = \ln(1+x)$ e $g(x) = \cos(\frac{\pi}{2} \cdot x)$. applicando il teorema di Cauchy a f e g si trova $c \in (0,1)$ tale che $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \ldots$

7. Trovare i punti di flesso della funzione $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 9x^3 + 2\ln(x)$.

8. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + (-1)^n}{n^a}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente o un documento. I telefoni devono rimanere spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 18/9/24 — Esercizio

Considerare l'espressione $\quad f(x) = \dfrac{x \cdot (|x| - 3)}{x - 1}.$

(A) (1 punto) Determinare il più grande $D \subseteq \mathbb{R}$ su cui essa definisce una funzione.

(B) (2 punti) Calcolare i limiti di f agli estremi di D.

(C) (3 punti) Trovare tutti gli asintoti del grafico di f.

(D) (3 punti) Indicare gli intervalli di crescenza e decrescenza di f e i suoi massimi e minimi relativi.

Risposte ai quesiti

1. $f'(x) = 2x \cdot e^{-x^2} \cdot \sin(e^{-x^2})$

2. $+\infty$

3. 120

4. $\frac{1}{2}$

5. $f(1) = 6 - 1 = 5$; infine $g'(5) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$. L'espressione $6x - x^2$ vale 0 in 0 e vale 8 in 2, è continua e derivabile, inoltre è strettamente crescente perché ha derivata prima strettamente positiva (dunque non nulla), dunque f è ben definita su $[0, 2]$, ha immagine $[0, 8]$ ed è invertibile con inversa derivabile

6. $-\ln(2)$

7. $x = \frac{1}{3}$

8. $a > 2$

Soluzione dell'esercizio

(A) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

(B) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to (1)^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to (1)^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

(C) Obliquo sinistro $y = -x - 4$, verticale $x = 1$, obliquo destro $y = x - 2$

(D) Decrescente su $(-\infty, -1]$; crescente su $[-1, 1)$ e su $(1, +\infty)$; minimo relativo in $x = -1$