UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 9/1/24 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Posto $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ considerare la funzione $f : X \to X$ dove $f(x)$ è il resto della divisione $(3x + 2) : 5$. Dire se f sia surgettiva e/o iniettiva.

2. Calcolare $\dfrac{\log_3(9)}{\sqrt{\log_{81}\left(\sqrt{3}\right)}}$.

3. Trovare le radici del polinomio complesso $2z^2 + (i - 6)z + 1 + 3i$.

4. Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos\left(\frac{2+(-1)^n}{4} \cdot \pi\right)}{1 + 2^{-n}}$.

5. Determinare l'immagine J della funzione $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x - 2\log(1 + x)$ e dire se f pensata come funzione da $[0, 3]$ a J sia invertibile con inversa continua.
(Può servire sapere che $\mathrm{e}^3 = 20.085\ldots$)

6. Per la funzione $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \cos(\pi \cdot x) + 2x - x^2$ il teorema di Lagrange garantisce l'esistenza di $c \in (-1, 2)$ con $f'(c) = \ldots$

7. Calcolare lo sviluppo di Taylor all'ordine 5 nel punto $x = 0$ per la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \cos(2x) - \mathrm{e}^{x^2}$.

8. Provare che il metodo iterativo di ricerca degli zeri tramite le tangenti al grafico si applica alla funzione $f : [-1, 0] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Dire a partire da quale estremo si debba applicare il metodo e quale punto si ottenga alla prima iterazione.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente o un documento. I telefoni devono rimanere spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 9/1/24 — Esercizio

Considerare l'espressione $f(x) = \dfrac{x}{1+\log(x)}$.

(A) (1 punto) Determinare il più grande $D \subset \mathbb{R}$ tale che f definisce una funzione $f : D \to \mathbb{R}$.

(B) (1 punto) Dire se f sia continua su D.

(C) (3 punti) Calcolare i limiti di f agli estremi di D e determinare tutti gli asintoti del grafico di f.

(D) (2 punti) Determinare tutti i punti di massimo e di minimo locale di f.

(E) (2 punti) Indicare gli intervalli di concavità e convessità di f.

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Sul tavolo è consentito avere solo solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto dell'esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte ai quesiti

1. Bigettiva

2. $4\sqrt{2}$

3. $\frac{i}{2}$ e $3-i$

4. Non esiste

5. $J = [1-2\log(2), 3-4\log(2)]$; non è invertibile

6. $\frac{5}{3}$

7. $-3x^2 + \frac{x^4}{6} + \mathrm{o}(x^5)$

8. $f(-1) < 0 < f(0)$; $f'(x)$ è positiva e $f''(x)$ è negativa su $[-1, 0]$; si parte da -1 e si trova $-\frac{5}{8}$

Soluzione dell'esercizio

(A) $D = (0,\, \mathrm{e}^{-1}) \cup (\,\mathrm{e}^{-1}, +\infty)$

(B) Sì

(C) Limiti $0, -\infty, +\infty, +\infty$ in $0^+, (\,\mathrm{e}^{-1})^-, (\,\mathrm{e}^{-1})^+, +\infty$; asintoto verticale $x = \mathrm{e}^{-1}$; limite 0 di $f(x)/x$ in $+\infty$, dunque non ci sono asintoti obliqui

(D) Minimo locale in $x = 1$

(E) Concava su $(0,\, \mathrm{e}^{-1})$ e su $[\,\mathrm{e}, +\infty)$, convessa su $(\,\mathrm{e}^{-1},\, \mathrm{e}]$